Técnicas para convergência da Expansão do Gás de Polímeros e uma aplicação ao Método Probabilístico

Tese de doutorado

Rodrigo Bissacot Proença

Orientador
Aldo Procacci – UFMG

Co-orientador
Roberto Fernández – Université de Rouen

Novembro de 2009.

Rodrigo Bissacot Proença

Técnicas para convergência da Expansão do Gás de Polímeros e uma aplicação ao Método Probabilístico

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de doutor em Matemática

ATA DA VIGÉSSIMA TERCEIRA DEFESA DE TESE DO ALUNO RODRIGO BISSACOT PROENÇA, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA TRINTA DE NOVEMBRO DE 2009.

Aos trinta dias do mês de novembro de 2009, às 14h00, na Sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese do aluno Rodrigo Bissacot Proença, intitulada: *"Técnicas para convergência da expansão do gás de polímero e uma aplicação ao método probabilístico"*, requisito final para obtenção do Grau de doutor em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Aldo Procacci, após dar conhecimento aos presentes o teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a argüição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado, por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 30 de novembro de 2009.

PROF. ALDO PROCACCI
Orientador - (UFMG)

PROF. GASTÃO DE ALMEIDA BRAGA
Examinador - (UFMG)

PROF. SACHA FRIEDLI
Examinador - (UFMG)

PROF. RICARDO SCHOR
Examinador - (DF-UFMG)

PROF. DOMINGOS MARCHETTI
Examinador - (USP)

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Secretaria de Pós-Graduação em Matemática
(31) 3409.5963 FAX 3409.5797
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br // www.mat.ufmg.br/pgmat

FOLHA DE APROVAÇÃO

"Técnicas para convergência da expansão do gás de polímero e uma aplicação ao método probabilístico

RODRIGO BISSACOT PROENÇA

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Aldo Procacci
UFMG

Prof. Gastão de Almeida Braga
UFMG

Prof. Sacha Friedli
UFMG

Prof. Ricardo Schor
UFMG

Prof. Domingos Marchetti
USP

Belo Horizonte 30 de 11 de 2009.

Agradecimentos

Esta é certamente a parte mais incompleta deste texto. Pode ser que muitos achem exagero ao verem o tamanho desta parte, mas escolhi tentar citar algumas das muitas pessoas que me ajudaram a finalizar esta etapa e já peço desculpas aos que deixarei de citar aqui.

Agradeço aos meus dois orientadores Aldo Procacci e Roberto Fernández, não só pela disposição e paciência quando respondiam meus questionamentos, mas também por direcionar de maneira muito eficaz os rumos dessa tese. Destaco ainda que sou muito grato a vocês dois pela oportunidade de ter participado do programa de doutorado sanduíche, sem dúvida uma experiência muito importante para mim. Em particular, agradeço ao Roberto por me receber de maneira tão calorosa, me buscando no aeroporto e dizendo-me a seguinte frase no primeiro dia na Université de Rouen:

"– Olá Rodrigo, nos encontraremos uma vez por semana para conversarmos assim como faço com outros pesquisadores, pois não faço distinção entre aluno e professor. Você é meu colega de pesquisa."

Num meio onde ainda encontramos tanta gente com comportamento oposto a este, é muito legal conhecer um grande pesquisador com esta postura tão bacana. Este é um dos exemplos que levarei para minha vida.

Agradeço também aos professores da UFMG: Israel Vainsencher, Nikolai Goussevskii, Ronald Dickman e Paulo Carrião pelo apoio, cursos ministrados, conversas de corredor, etc.

Agradeço aos seguintes professores da UFRGS que me ajudaram a ter uma formação matemática sólida ainda na graduação e mestrado, de forma que eu pudesse chegar no doutorado em plenas condições de excutá-lo: Artur Oscar Lopes, Alexandre Baraviera, Leonardo Bonorino, Eduardo Brietzke, Jaime Ripoll, entre outros.

Agradeço ao meu amigo Leandro Cioletti pela parceria que rendeu uma das minhas primeiras publicações. Valeu pelas "baladas na night", ou seja, madrugadas na UFMG abrindo conta no quadro ou lá em casa tomando café até altas horas e acordando os vizinhos vibrando com mais uma passagem de artigo compreendida, pelas saídas no La Grepia depois, por ter me ajudado a manter o seminário dos alunos vivo por tempos e por ter participado e ser um dos idealizadores do nosso indestrutível seminário clandestino! Boa parte das coisas que sei sobre grafos aprendi naquele seminário que teimou em existir por tanto tempo.

Por falar em seminário clandestino, agradeço aos ilustres frequentadores deste: Luccas, Mala e Bernardo que apareciam lá com tanta disposição para aprender.

Agradeço ao Marcelo Disconzi pela amizade sincera, artigos que me pasou, conversas e e-mails trocados durante todos esses anos.

Agradeço ao Eduardo Garibaldi pela parceria no artigo de Otimização Ergódica e por ter me incentivado a ir ao programa de verão do IMPA há 10 anos atrás. Não sei se tu consegues perceber, mas se não fosse aquele verão, que me deu nova vida no curso, talvez hoje essa tese não existisse.

Agradeço aos amigos da UFMG: Wesley Tomaz, Heleno, Narciso, Bin Landen, Godines, Tonesco, a belohorizontina Patrícia Cirilo, Bafo e ao casal Gilberto e Danúbia (não fossem estes dois últimos eu não teria ido pra França). Foi muito legal ter colegas como o Gustavo Souza para conversar sobre matemática e exemplos de superação como o Maurício.

Agradeço aos amigos que fiz na UFRGS, pessoas que me ajudaram durante toda a graduação, mestrado e doutorado: Leandro Colau, Cíntia Peixoto, Bárbara Pogorelsky, Alexandre Corrêa, Joana Mohr e Rafael Rigão.

Agradeço aos amigos que fiz no IMPA: Fernando del Carpio, Nilton Barroso, Claudemir Silvino, Marcio Batista, Marcos Petrúcio e outros tantos, pelos mais variados apoios nestes sete verões de IMPA, pela ajuda e hospedagem no Rio e pela amizade.

Agradeço pela amizade dos membros da ORFAV, especial ao Vladimir pela ajuda nas mudanças e por financiar vários dos verões quando eu não ganhava bolsa, também agradeço à Marisa e ao Orlando pela mesma razão, e ao Flávio por escolher um padrinho tão desnaturado como eu.

Agradeço aos meus pais pela ajuda e pela disposição de viajar até Belo Horizonte para minha defesa.

Agradeço a toda família Nascimento, em especial ao André que me convidou, à Maria e família por serem tão legais comigo e ao casal Lena e Cidão, pelo apoio e reconhecimento, em especial à Lena pelas bolachas e café que eram o combustível nas madrugadas para terminar as listas de exercícios. Acredito que vocês saibam o quanto são importantes pra mim, mesmo assim é bom relembrar pois eu sei muito bem que este tipo de ajuda que me deram é coisa raríssima hoje em dia.

Agradeço aos professores Domingos Marchetti, Ricardo Schor, Gastão Braga e Sacha Friedli por aceitarem participar da banca e pelas várias sugestões e comentários. Em particular ao Sacha, agradeço muito pela força no artigo com o Leandro e mais ainda, agradeço por teres tomado a posição que tomou no episódio da sala do café e alunos da pós; que este tipo de atitude sirva de exemplo para as novas e velhas gerações de professores.

Agradeço a CAPES por financiar minha ida para França e agradeço ao CNPQ pela bolsa de doutorado.

Por fim, o agradecimento mais importante, agradeço à minha esposa Pita, por ser o amor da minha vida, por ter muita paciência comigo, por trazer paz para o meu coração, por me fazer uma pessoa melhor, por me ajudar corrigindo este texto e vários outros que já escrevi. por ser minha parceira de toda e qualquer indiada e por ser a esposa que sempre sonhei em ter.

Na falta de uma citação de escritor famoso, finalizo com uma frase que sintetiza bem a atual situação do país e minha caminhada até este ponto. Esta que foi possível graças a estes que citei acima e outros muitos colegas e amigos que, mesmo quando viam que a situação era complicada, não tentaram destruir um sonho:

"*Em país onde um metalúrgico persistente pode ser Presidente, filho de soldador pode ser Doutor.*"

Resumo

Neste trabalho comparamos os diferentes critérios de convergência disponíveis para o gás de polímeros com interações do tipo caroço duro, com ênfase ao caso onde os polímeros são subconjuntos finitos de um conjunto enumerável (e.g. expansão em contornos e mais geralmente expansões de altas e baixas temperaturas). Em ordem crescente de eficiência, estes critérios são: (i) Critério de Dobrushin, obtido por um argumento simples de indução; (ii) Critério de Gruber-Kunz, obtido através do uso das equações de Kirkwood-Salzburg, e (iii) o Critério de Fernández-Procacci, obtido via combinatória e controle dos termos da expansão. Mostraremos que quando os polímeros são subconjuntos finitos o critério de Fernández-Procacci pode ser provado usando uma adaptação do argumento indutivo de Dobrushin e, de maneira alternativa e mais elementar, controlando equações do tipo Kirkwood-Salzburg. Além disso mostraremos que, para o caso geral de polímeros abstratos, esta maneira alternativa nos fornece a mesma região de convergência do argumento dado por Dobrushin.

Através do critério de Fernández-Procacci para a analiticidade do logaritmo da função partição do gás abstrato de polímeros e usando uma conexão entre um antigo resultado de Shearer e o Lema Local de Lovász com o polinômio de conjuntos independentes de grafos, e consequentemente como observaram Scott e Sokal, com a função partição de um gás de rede com interação do tipo caroço duro em grafos, nós obtemos um versão mais eficiente do Lema Local de Lovász. Como aplicação obtemos cotas melhores para a existência de matrizes do tipo latin transversal.

Abstract

We compare the different convergence criteria available for cluster expansions of polymer gases subjected to hard-core exclusions, with emphasis on polymers defined as finite subsets of a countable set (e.g. contour expansions and more generally high- and low-temperature expansions). In order of increasing strength, these criteria are: (i) Dobrushin criterion, obtained by a simple inductive argument; (ii) Gruber-Kunz criterion, obtained through the use of Kirkwood-Salzburg equations, and (iii) Fernández-Procacci criterion, obtained via direct combinatorial handling of the terms of the expansion. We show that for subset polymers the Fernández-Procacci criterion can be proved both by a suitable adaptation of Dobrushin inductive argument and by an alternative and more elementary handling of the Kirkwood-Salzburg equations. In addition we show that for general abstract polymers this alternative treatment leads to the same convergence region as the inductive Dobrushin argument.

Through the Fernández-Procacci criterion for the analyticity of the logarithm of the partition function of the abstract polymer gas and using a connection between an old result by Shearer and the Lovász Local Lemma with the independent set polynomial on graphs, and consequently, as observed by Scott and Sokal, with the partition function of the hard core lattice gas on graphs, we get an improved version of the Lovász Local Lemma. As an application we obtain tighter bounds on conditions for the existence of latin transversal matrices.

Conteúdo

Introdução **8**

1 A Expansão do Gás de Polímeros Abstratos **12**

1.1 Identidades Grafo-Árvore 16

1.2 Reorganização das séries 21

1.3 Árvores e convergência 24

1.4 Critérios de Convergência 29

1.5 Exemplos 34

1.5.1 Modelo dominó em $\mathbb{Z}^2$ 34

1.5.2 O gás de rede 34

1.5.3 Gás de subconjuntos finitos de um conjunto enumerável 36

2 O Método das equações de Kirkwood-Salzburg **39**

2.1 O Formalismo de Gruber-Kunz para o gás de subconjuntos 39

2.2 As equações de Kirkwood-Salzburg para o gás de polímeros abstratos 44

2.3 A prova do Critério de Dobrushin usando as equações de Kirkwood-Salzburg . . 49

3 O Método indutivo **53**

3.1 Critério de Dobrushin 53

3.2 Critério de Gruber-Kunz-Fernández-Procacci para o Gás de subconjuntos finitos 58

4 Aplicações à Combinatória e Teoria dos Grafos: o Método Probabilístico **61**

4.1 O Lema Local de Lovász 62

4.2 A conexão com o Gás de Rede 69

4.3 A relação entre as cotas inferiores para $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i)$ 80

4.4 Um Novo Lema 81

4.5 Aplicações 86

Trabalhos Futuros **92**

A Princípio de Inclusão-Exclusão **93**

B Reticulados e Pontos Fixos **94**

Bibliografia **98**

Introdução

Com origem na Física, os métodos perturbativos então chamados de *Cluster Expansion* constituem hoje um conjunto de poderosas técnicas usadas em diversas áreas tais como Física-Matemática, em particular Mecânica Estatística [55, 65, 70] e Teoria dos Campos [68], bem como Probabilidade [31], Combinatória [9, 67], Teoria Ergódica [8], Teoria dos Grafos [11], entre outras.

Os resultados obtidos em cada uma destas áreas têm conseqüências nas outras e vice-versa. Muitas vezes a ligação entre elas é feita através da expansão em polímeros que foi desenvolvida originalmente na área de Mecânica Estatística Rigorosa, mas que pode ser reinterpretada e útil em um contexto aparentemente completamente diferente.

O objetivo no início era expressar potenciais termodinâmicos via séries analíticas na teoria dos gases. As idéias iniciais remontam aos trabalhos de Mayer e Montroll da década de 40 [50, 51].

Os primeiros resultados rigorosos surgiram nos anos sessenta e setenta e usavam uma abordagem em certo sentido indireta: o *Método das Equações de Kirkwood-Salzburg* [43, 35, 46, 50, 49, 58, 65, 68]. Essa técnica consiste em modelar o problema usando um espaço de Banach e um operador nele definido, escrevendo equações envolvendo as funções de correlação do sistema com o objetivo de mostrar a analiticidade em determinada região dos parâmetros. O método é de certa forma indireto, pois não é feito um controle dos coeficientes da série em si.

Na década de oitenta uma nova proposta, mais direta em certos aspectos, ganhou força. O método consistia em utilizar identidades do tipo grafo-árvore e cotar os coeficientes das séries da pressão [7, 15, 17]. Esta abordagem era chamada muitas vezes de *método direto* pois consistia em usar as identidades do tipo grafo-árvore para estimar diretamente os coeficientes de Ursell da série da pressão.

Dentro da Cluster Expansion, merece destaque um modelo chamado de *gás de polímeros*. O gás de polímeros é um modelo discreto que tem um papel fundamental em Mecânica Estatística e Teoria dos Campos, pois inúmeros modelos destas áreas podem ser reformulados em termos deste. Entre os exemplos figuram sistemas de spin tanto de curto quanto de longo alcance, spin limitado ou não, teorias escalares dos campos, sistemas fermiônicos etc. O gás de polímeros foi originariamente introduzido por Gruber e Kunz [43] em 1971. No artigo original, os polímeros eram subconjuntos finitos da rede cúbica d-dimensional. Em 1985, Kotecky e Preiss [48] propuseram um modelo abstrato no qual os polímeros eram simplesmente elementos pertecentes a um conjunto enumerável $\mathcal{P}$, o conjunto dos polímeros, cuja única estrutura era constituída por uma relação simétrica e reflexiva em $\mathcal{P}$, que eles chamaram de *relação de incompatibilidade.*

O ponto central no estudo do gás de polímeros é analisar a convergência da série de pressão deste gás tentando produzir um critério de convergência baseado em uma relação envolvendo as atividades dos polímeros. A idéia é que este critério possa ser sucessivamente aplicado a qualquer modelo específico, uma vez reformulado em termos de gás de polímeros.

No artigo original de Gruber e Kunz o critério de convêrgência foi obtido através do método das equações de Kirkwood-Salzburg. Anos depois, critérios similares para o gás de polímeros de Gruber e Kunz foram obtidos também via o método direto (i.e. via identidades do tipo grafo-árvore) por Cammarota [17].

Por outro lado, no estudo do gás de polímeros abstratos elaborado em [48] foi utilizada uma abordagem totalmente nova baseada na fórmula da inversão de Möbius. Os autores avisam logo no abstract que não usam nem as equações de Kirkwood-Salzburg e tampouco controlam as séries usando argumentos de combinatória e identidades grafo-árvore. Através desta nova abordagem, Kotecký e Preiss produziram um critério de convergência (aparentemente) melhor do que todos os apresentados até o momento.

Na década seguinte, Roland Dobrushin obtém um novo critério para o gás de polímeros abstratos que melhora levemente o Critério de Kotecký-Preiss através de uma prova bem mais elementar baseada apenas no princípio da indução e também prova o Critério de Kotecký-Preiss desta forma [21, 22]. O Critério de Dobrushin não teve a mesma receptividade da comunidade que seu antecessor pois sua aplicação a problemas concretos era menos imediata e, na maioria das vezes, se mostrava equivalente ao critério de Kotecký-Preiss nos problemas de interesse em Mecânica Estatística e Teoria de Campos. Recentemente, novas provas por indução do Critério de Kotecký-Preiss e do Critério de Dobrushin surgiram [55, 52, 67].

Em 1999, Procacci e Scoppola [63] provam o critério de Kotecký-Preiss através do controle da série usando identidades do tipo grafo-árvore em um contexto um pouco menos abstrato: o gás de subconjuntos finitos da rede. Isso deixava o método direto usando combinatória e árvores em situação de igualdade em relação à maneira de provar este critério de convergência, pelo menos neste caso.

Porém, em 2007, Fernández e Procacci [32], usando esta abordagem combinatória e uma identidade devida a Penrose [58], obtêm um novo critério de convergência para o gás de polímeros abstratos e também mostram, de maneira clara, a relação entre os critérios até então conhecidos neste caso mais geral. O Critério de Fernández-Procacci é melhor do que o Critério de Dobrushin que, por sua vez, é mais eficiente do que Kotecký-Preiss.

Neste trabalho ainda é trazido à tona um critério obtido em 1971 por Gruber e Kunz [43] para o gás de subconjuntos finitos da rede. Este critério já era melhor do que os critérios até o presente momento porém, aparentemente, havia caído no esquecimento. Ele foi obtido por Gruber e Kunz via o antigo método das equações de Kirkwood-Salzburg e, surpreendentemente, Fernández e Procacci, ao aplicarem o novo critério ao gás de subconjuntos finitos, chegaram na mesma cota.

Posto isso, é natural se perguntar se as equações de Kirkwood-Salzburg podem ser aplicadas ao gás de polímeros abstratos e se estas reproduzem o Critério de Fernández-Procacci. E ainda, onde se situa a abordagem mais simples da indução neste contexto e se é possível obter o novo critério através do método indutivo.

Responderemos estas perguntas neste trabalho.

De fato, conseguimos uma substancial simplificação da prova de Gruber e Kunz para o caso do gás de subconjuntos finitos. Também mostramos que nossa prova pode ser adaptada ao gás de polímeros abstratos. A abordagem do método de Kirkwood-Salzburg no caso de polímeros abstratos acaba produzindo o Critério de Dobrushin e não o Critério de Fernández-Procacci.

Mostraremos que é possível provar *por indução* o Critério de Gruber-Kunz redescoberto por Fernández e Procacci no caso do gás de subconjuntos finitos, respondendo a uma pergunta que intrigava especialistas da área, entre eles Alan Sokal e o próprio Roman Kotecký.

A expansão em polímeros possui uma inesperada e surpreendente ligação com o então chamado *Método Probabilístico* [4], desenvolvido pelo famoso matemático *Paul Erdös* [16, 56]. A relação entre essas duas teorias demorou vinte anos para ser estabelecida, sendo feita por Scott e Sokal em 2005 [67]. Eles estabeleceram a conexão entre a Teoria dos Gases de Rede e um resultado de Shearer de 1985 [69] usando, fundamentalmente, o fato de que o polinômio de conjuntos independentes da Teoria dos Grafos é simplesmente a função partição do gás de rede.

O Método Probabilístico foi popularizado por Erdös quando este resolveu uma série de problemas de combinatória e Teoria dos Grafos usando a técnica que, na essência, diz que na dificuldade de exibir determinado objeto (estruturas discretas, grafos com determinadas propriedades etc), cria-se um espaço de probabilidade onde se mostra que o conjunto dos objetos com as propriedades procuradas tem probabilidade positiva; então, em particular, existe tal objeto.

Scott e Sokal mostraram que o Critério de Dobrushin é “equivalente”a um dos principais teoremas que sustentam o Método Probabilístico: o *Lema Local de Lovász.*

Tendo em vista que o Critério de Fernández-Procacci é mais eficiente do que o Critério de Dobrushin, é de se esperar que exista um teorema melhor do que o célebre e vastamente utilizado Lema de Lovász proveniente deste novo critério, provaremos também este resultado.

O texto é organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1 provamos todos os critérios de convergência: Kotecký-Preiss, Dobrushin e, por fim, o novo critério de Fernández-Procacci segundo a formulação apresentada em [32].

No Capítulo 2 estudamos o Método das equações de Kirkwood-Salzburg e é dada uma prova do Critério de Dobrushin no caso abstrato usando este método, além de uma nova prova, bem mais simples, no caso do gás de subconjuntos finitos da rede.

Em seguida, no Capítulo 3, apresentamos provas por indução dos critérios de convergência. A prova do Critério de Gruber e Kunz, redescoberto por Fernández e Procacci, é feita no caso do gás de subconjuntos finitos da rede.

Finalmente, no Capítulo 4, usamos o Critério de Fernández-Procacci para provar uma versão melhor do Lema Local de Lovász.

Capítulo 1

A Expansão do Gás de Polímeros Abstratos

O modelo do *gás de polímeros abstratos* foi proposto primeiramente por Kotecký e Preiss em [48] na tentativa de desenvolver uma teoria geral que englobasse os vários modelos de Mecânica Estatística e Teoria de Campos. Este capítulo é dedicado ao estudo dos critérios de convergência para este modelo. O objetivo do capítulo é expor de uma maneira mais elementar o critério de convergência de Fernández-Procacci [32] e é baseado em [59].

O modelo do gás de polímeros abstratos é composto por um conjunto $\mathcal{P}$ enumerável, cujos elementos são chamados de *polímeros*, e uma *relação simétrica e reflexiva* $\mathcal{R}_V \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$.

Quando $(\gamma, \gamma') \in \mathcal{R}_V$, escrevemos $\gamma \nsim \gamma'$ e dizemos que γ e γ' são *incompatíveis*. Do contrário, se $(\gamma, \gamma') \notin \mathcal{R}_V$ dizemos que os polímeros γ e γ' são *compatíveis* e denotamos $\gamma \sim \gamma'$.

Indexamos a relação por V, pois ela é determinada quando for dado um potencial de interação de pares $V(\gamma, \gamma')$ assumindo valores no conjunto $\{0, +\infty\}$, ou seja, *repulsivo* e do *tipo caroço duro*.

A compatibilidade entre os polímeros, ou seja, a relação $\mathcal{R}_V$, fica inteiramente determinada quando fixado um potencial deste tipo, de fato: $(\gamma, \gamma') \notin \mathcal{R}_V$ se, e somente, $V(\gamma, \gamma') = 0$ e, neste caso, os polímeros γ e γ' são compatíveis. Analogamente, $V(\gamma, \gamma') = +\infty$ se, e somente se, $\gamma \nsim \gamma'$, ou seja, $(\gamma, \gamma') \in \mathcal{R}_V$.

Note que a hipótese de que $\mathcal{R}_V$ é reflexiva implica $\gamma \nsim \gamma'$, $\forall\, \gamma \in \mathcal{P}$.

Também assumimos que em $\mathcal{P}$ é definida uma função $\boldsymbol{\rho} : \mathcal{P} \to (0, \infty) : \gamma \mapsto \rho_\gamma$. O número positivo ρ_γ é chamado de *atividade* associada ao polímero γ. De fato, apesar de nas aplicações físicas a atividade de um polímero ser um valor positivo, vamos tratar de atividades mais gerais, em

$\mathbb{C}^{\mathcal{P}}$. O papel das atividades positivas tem destaque pois estaremos interessados na convergência absoluta das séries, ou seja, nosso objetivo será determinar polidiscos $\{z_\gamma : |z_\gamma| \leq \rho_\gamma\}$ onde a série de interesse é absolutamente convergente.

As séries definidas neste capítulo serão usadas no restante do texto.

Seja $\Lambda \subset \mathcal{P}$ finito.

A *função partição* grande canônica do gás com interações do tipo caroço duro V é dada por

$$\begin{aligned}\Xi_\Lambda(z_\Lambda) &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\Lambda^n} z_{\gamma_1} z_{\gamma_2} \cdots z_{\gamma_n} e^{-\sum_{1\leq i\leq j\leq n} V(\gamma_i,\gamma_j)} \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\Lambda^n} z_{\gamma_1} z_{\gamma_2} \ldots z_{\gamma_n} \prod_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{1}_{\{\gamma_i \sim \gamma_j\}},\end{aligned}$$

$\Xi_\Lambda(z_\Lambda)$ é uma função inteira em $\mathbb{C}^{|\Lambda|}$ e vale $|\Xi_\Lambda(z_\Lambda)| \leq e^{\sum_{\gamma\in\Lambda}|z_\gamma|}$.

A *pressão* do gás de polímeros abstratos (a volume finito Λ) é definida como

$$|P_\Lambda(z_\Lambda)| = \frac{1}{|\Lambda|} \log \Xi_\Lambda(z_\Lambda). \tag{1.1}$$

Fenômenos físicos como transições de fase se manifestam no limite termodinâmico, então o objetivo é controlar esta série uniformemente em relação ao volume. Para isso, usaremos o seguinte resultado fundamental sobre série formais largamente utilizado em Mecânica Estatística:

Proposição 1.1. (Série de Mayer)

$$\log \Xi_\Lambda(z_\Lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\Lambda^n} \phi^T(\gamma_1, ..., \gamma_n) z_{\gamma_1} \cdots z_{\gamma_n} \tag{1.2}$$

onde $\phi^T(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ é dado por

$$\phi^T(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 1 \\ \sum\limits_{\substack{g\in G_n \\ g\subset g(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)}} (-1)^{|E_g|}, & se\ n \geq 2\ e\ g(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \in G_n \\ 0, & se\ n \geq 2\ e\ g(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \notin G_n \end{cases} \tag{1.3}$$

onde G_n denota o conjunto dos grafos conexos com conjunto de vértices $I_n = \{1, 2, ..., n\}$ e, para cada n-upla $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in \mathcal{P}^n$, o grafo $g(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ é definido da seguinte forma: o conjunto de vértices é I_n e $\{i, j\} \in E(g(\gamma_1, ..., \gamma_n))$ se, e somente se, $\gamma_i \nsim \gamma_j$.

Prova: Ver [59, 70, 74].

A equação (1.2) faz sentido apenas para $z \in \mathbb{C}^{\mathcal{P}}$ tal que a série formal no lado direito de (1.2) seja absolutamente convergente. Para a análise da convergência absoluta consideraremos a série de termos positivos

$$|\log \Xi|_{\Lambda}(\rho_{\Lambda}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1,...,\gamma_n)\in\Lambda^n} |\phi^T(\gamma_1, ..., \gamma_n)|\rho_{\gamma_1} \cdots \rho_{\gamma_n} \tag{1.4}$$

para $\rho \in (0, \infty)^{\mathcal{P}}$. Note que

$$|\log \Xi_{\Lambda}(z_{\Lambda})| \leq |\log \Xi|_{\Lambda}(z_{\Lambda}),$$

para todo $z \in \mathcal{C}^{|\Lambda|}$ no disco $\{|z_\gamma| \leq \rho_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$, de modo que se provarmos que a série (1.2) converge absolutamente, para todo Λ e alguma atividade $\rho = \{\rho_\gamma\}_{\gamma\in\mathcal{P}} \in (0, \infty)^{\mathcal{P}}$, então (1.2) convergirá absolutamente, para todo Λ e $z \in \{|z_\gamma| \leq \rho_\gamma\}_{\gamma\in\mathcal{P}}$.

A saber, para uma atividade fixa γ_0, definimos a *soma enraizada* como segue

$$|\textstyle\sum|_{\gamma_0}(\rho) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(\gamma_1,...,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n \\ \exists i:\gamma_i=\gamma_0}} |\phi^T(\gamma_1, ..., \gamma_n)|\rho_{\gamma_1} \cdots \rho_{\gamma_n}. \tag{1.5}$$

Agora observe que

$$\sum_{\substack{(\gamma_1,...,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n \\ \exists i:\gamma_i=\gamma_0}} = \sum_{(\gamma_1=\gamma_0,\gamma_2,...,\gamma_n)} \frac{n}{m_{\gamma_0}(\gamma_1, ..., \gamma_n)}$$

onde $m_{\gamma_0}(\gamma_1, ..., \gamma_n) = |\{i \in I_n : \gamma_i = \gamma_0\}|$.

Assim, podemos reescrever $|\sum_{\gamma_0}|(\rho)$ como segue

$$|\textstyle\sum|_{\gamma_0}(\rho) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n} \frac{|\phi^T(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)|}{m_{\gamma_0}(\gamma_1, ..., \gamma_n) + 1} \rho_{\gamma_0}\rho_{\gamma_1} \cdots \rho_{\gamma_n}.$$

Agora é conveniente definir a função

$$|\textstyle\prod|_{\gamma_0}(\rho) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n} |\phi^T(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)|\rho_{\gamma_1} \cdots \rho_{\gamma_n}. \tag{1.6}$$

As duas séries formais $|\prod|_{\gamma_0}(\rho)$ e $|\sum|_{\gamma_0}(\rho)$ estão diretamente relacionadas. De fato, observe que

$$|\textstyle\sum|_{\gamma_0}(\rho) = \rho_{\gamma_0} \displaystyle\int_0^1 |\Pi_{\gamma_0}|(\rho(\alpha))d\alpha$$

onde

$$\rho_\gamma(\alpha) = \begin{cases} \rho_\gamma & \text{se} \quad \gamma \neq \gamma_0 \\ \\ \alpha\rho_\gamma & \text{se} \quad \gamma = \gamma_0. \end{cases}$$

Observe agora que

$$|\textstyle\sum|_{\gamma_0}(\rho) \leq \rho_{\gamma_0}|\textstyle\prod|_{\gamma_0}(\rho)$$

e, para todo $\{|z_\gamma| \leq \rho_\gamma\}_{\gamma\in\mathcal{P}}$,

$$|P_\Lambda(z_\Lambda)| = \frac{1}{|\Lambda|}|\log \Xi_\Lambda(z_\Lambda)| \leq \sup_{\gamma_0\in\mathcal{P}} \rho_{\gamma_0}|\textstyle\prod|_{\gamma_0}(\rho). \tag{1.7}$$

Assim, se formos capazes de provar que $|\prod|_{\gamma_0}(\rho)$ (e portanto $|\sum|_{\gamma_0}(\rho)$) converge para alguma função $\rho \in [0,\infty)^{\mathcal{P}}$ e o supremo acima for finito, então a pressão $|P_\Lambda(z_\Lambda)|$ também convergirá absolutamente para todo Λ e z no polidisco $\{|z_\gamma| \leq \rho(\gamma)\}_{\gamma\in\mathcal{P}}$ com a cota uniforme em Λ

$$|P_\Lambda(z_\Lambda)| \leq \sup_{\gamma_0\in\mathcal{P}} \rho_{\gamma_0}|\textstyle\prod|_{\gamma_0}(\rho).$$

As séries $\prod_{\gamma_0}(z)$ e $\sum_{\gamma_0}(z)$ a volume finito dadas por

$$\textstyle\sum_{\gamma_0}(z_\Lambda) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\Lambda^n\\ \exists i:\gamma_i=\gamma_0}} \phi^T(\gamma_1,...,\gamma_n)z_{\gamma_1}\cdots z_{\gamma_n} \tag{1.8}$$

$$\textstyle\prod_{\gamma_0}(z_\Lambda) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\Lambda^n} \phi^T(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)z_{\gamma_1}\cdots z_{\gamma_n}, \tag{1.9}$$

estão diretamente relacionadas com $\log \Xi_\Lambda(z_\Lambda)$.

De fato:

$$\textstyle\prod_{\gamma_0}(z_\Lambda) = \dfrac{\partial}{\partial z_{\gamma_0}}\log \Xi_\Lambda(z_\Lambda) \tag{1.10}$$

$$\textstyle\sum_{\gamma_0}(z_\Lambda) = \log \Xi_\Lambda(z) - \log \Xi_{\Lambda\setminus\gamma_0}(z). \tag{1.11}$$

Portanto temos

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\gamma_0}(z_\Lambda) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\log \Xi_\Lambda(z_\Lambda(\alpha))d\alpha = z_{\gamma_0}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_{\gamma_0}}\log \Xi_\Lambda(z_\Lambda(\alpha))d\alpha \\ &= z_{\gamma_0}\int_0^1 \textstyle\prod_{\gamma_0}(z_\Lambda(\alpha))d\alpha \end{aligned}$$

onde

$$z_\gamma(\alpha) = \begin{cases} z_\gamma & \text{se} \quad \gamma \neq \gamma_0 \\ \\ \alpha z_\gamma & \text{se} \quad \gamma = \gamma_0. \end{cases}$$

O que faremos daqui em diante é controlar estas séries estimando os coeficientes de Ursell através da identidade de Penrose que estudaremos agora.

1.1 Identidades Grafo-Árvore

Como veremos a seguir, o ingrediente chave para a prova do Critério de Fernández-Procacci é identidade obtida por Penrose em [57].

Seja $V = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$ uma enumeração do conjunto de vértices e seja $\mathcal{C}_{\mathbb{G}}$ o conjunto de todos subgrafos geradores conexos de um grafo conexo $\mathbb{G} = (V, E)$.

Para cada $G \in \mathcal{C}_{\mathbb{G}}$ associamos a cada vértice de $V \backslash \{v_0\} = \{v_1, ..., v_n\}$ a distância $d(v_i) = d(i)$ ao vértice v_0 segundo a métrica induzida pelo grafo G. Essa métrica conta o número de elos do caminho mais curto que liga o vértice dado ao vértice v_0 usando elos de G.

Para cada grafo $G \in \mathcal{C}_{\mathbb{G}}$ vamos associar uma única árvore $\tau(G)$, que Penrose denominou por *árvore de Cayley*, construída através de dois passos:

(i) Deletamos os elos entre os vértices que estão a uma mesma distância do vértice v_0.

(ii) Após (i) restará uma ou mais possibilidades de um vértice que está à distância $d(i)$ ligar-se a um que está à distância $d(i) - 1$, deletamos todos estes elos exceto o que liga ao vértice de distância $d(i) - 1$ com o menor índice.

Ambos os passos não alteram a distância dos vértices ao vértice v_0 e, após (i) e (ii) restará uma única árvore de Cayley $\tau = \tau(G)$.

Dada uma árore $\tau \in \mathcal{C}_{\mathbb{G}}$, consideramos o conjunto $P(\tau) = \{G \in \mathcal{C}_{\mathbb{G}} : \tau = \tau(G)\}$ e o grafo máximal $R(\tau)$ dentro deste, ou seja, o grafo $R(\tau) \in P(\tau)$ e contém o maior número de elos possível. Dada $\tau \in \mathcal{C}_{\mathbb{G}}$, podemos obter $R(\tau)$ adicionando todos os elos $\{v_i, v_j\} \in E \backslash E(\tau)$ que satisfazem uma das condições abaixo:

(i) $d(i) = d(j)$ ou seja, v_i e v_j estão a mesma distância de v_0 em τ.

(ii) $d(j) = d(i) - 1$ e $i' < j$, onde $\{v_{i'}, v_j\} \in E(\tau)$.

Definimos então o conjunto $\mathcal{T}_R$ das *árvores de Penrose* tais que $\tau = R(\tau)$. Estas árvores terão um papel importante na prova do critério de convergência para a expansão do gás de polímeros abstratos.

Se para cada elo $e \in E$ associamos um número complexo x_e qualquer, temos a seguinte igualdade:

Proposição 1.2. Identidade de Penrose

$$\begin{aligned}\sum_{G\in\mathcal{C}_{\mathbb{G}}}\prod_{e\in E(G)} x_e &= \sum_{\tau\in\mathcal{T}_{\mathbb{G}}}\prod_{e\in E(\tau)} x_e \sum_{\mathcal{F}\subset E(R(\tau))\setminus E(\tau)}\prod_{e\in\mathcal{F}} x_e \\ &= \sum_{\tau\in\mathcal{T}_{\mathbb{G}}}\prod_{e\in E(\tau)} x_e \prod_{e\in E(R(\tau))\setminus E(\tau)}(1+x_e)\end{aligned}$$

Corolário 1.1. *Se $x_e = -1$ para todo $e \in E$, então:*

$$\sum_{G\in\mathcal{C}_{\mathbb{G}}}(-1)^{|E(G)|} = (-1)^{|V|-1}|\mathcal{T}_R| \tag{1.12}$$

Corolário 1.2. *Se $-1 \leq x_e \leq 0$ para todo $e \in E$, então:*

$$\left|\sum_{G\in\mathcal{C}_{\mathbb{G}}}\prod_{e\in E(G)} x_e\right| \leq \sum_{\tau\in\mathcal{T}_{\mathbb{G}}}\prod_{e\in E(\tau)}|x_e| \leq |\mathcal{T}_{\mathbb{G}}|$$

De fato, o esquema de Penrose pode ser generalizado e tanto a Proposição 1.2 quanto seus corolários serão válidos não só para a aplicação que associa cada $\tau \in \mathcal{T}_{\mathbb{G}}$ ao grafo $R(\tau)$, conforme descrevemos acima, mas para qualquer aplicação $R : \mathcal{T}_{\mathbb{G}} \to \mathcal{C}_{\mathbb{G}}$ satisfazendo:

(i) $E(R(\tau)) \supset E(\tau)$

(ii) $\mathcal{C}_{\mathbb{G}}$ é união disjunta dos conjuntos $[\tau, R(\tau)], \tau \in \mathcal{T}_{\mathbb{G}}$.

No item (ii), $[\tau, R(\tau)]$ denota o conjunto de todos os grafos $G \in \mathcal{C}_{\mathbb{G}}$ que satisfazem $E(\tau) \subseteq E(G) \subseteq E(R(\tau))$.

Para mais detalhes e referências para outras identidades satisfazendo as condições acima, ver [67].

Note também que aplicando a Identidade de Penrose (1.12), podemos reescrever $\phi^T(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ quando $g(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in G_n$ como

$$\phi^T(\gamma_1, ..., \gamma_n) = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{\tau\in T_n:\tau\subset g(\gamma_1,...,\gamma_n)\\ R(\tau)=\tau}} 1.$$

Conforme visto na seção anterior, para estudar a convergência absoluta da pressão, precisaremos apenas considerar as funções definidas em (1.6).

Reorganizaremos agora as séries $|\prod|_{\gamma_0}(\rho)$ da equação (1.6) usando a Identidade de Penrose.

Denotemos por T_n^0 o conjunto de todas as *árvores rotuladas* (isto é, árvores cujos vértices são $\{0, 1, 2, 3, ..., n\}$) para os quais o vértice 0 foi escolhido como raiz. Lembremos que o conjunto de vértices V_τ na árvore enraizada $\tau \in T_n^0$ admite uma ordem parcial natural $\prec$ definida como segue: dados dois vértices (distintos) u e v de τ, dizemos que v é um *descendente* de u ou u é um *ancestral* de v, e escrevemos $u \prec v$, se existe um caminho da raiz até v que contém u.

Se $\{v, u\}$ é um elo da árvore enraizada τ , então $v \prec u$ ou $u \prec v$. Assim qualquer elo $\{v, u\}$ numa árvore enraizada é orientado (isto é, é um par ordenado) e escrevemos (u, v) se $u \prec v$. Seja (u, v) um elo orientado numa árvore enraizada τ, então u é chamado *pai* (ou predecessor) e v é dito *filho* (ou sucessor). Note que cada vértice em τ diferente da raiz tem um, e apenas um, pai. Vértices de τ com o mesmo pai são chamados de *irmãos*. A raiz não tem predecessor e é o extremo com respeito à relação de ordem parcial $\prec$ em τ, isto é, cada vértice em τ diferente da raiz é um descendente da raiz.

Dado um vértice $v \neq 0$ na árvore enraizada $\tau \in T_n^0$, sua *profundidade*, denotada por $d(v)$, é o número de elos no único caminho desde a raiz até o vértice. Denotemos também por v' o pai de um vértice $v \neq 0$ e s_v o número de seus filhos, com $v^1, ..., v^{s_v}$ filhos de v. Se $s_v = 0$ dizemos que v é um ponto final ou uma *folha* de τ. Note finalmente que os filhos de qualquer vértice $v \in T_n^0$ podem ser naturalmente ordenados seguindo a ordem de seus rótulos, a saber, a ordenação de $v^1, ..., v^{s_v}$ é tal que $v^1 < v^2 < ... < v^{s_v}$.

De agora em diante, vamos sempre usar elementos $\tau \in T_n^0$ como árvores ordenadas no sentido de que os filhos $v^1, ..., v^{s_v}$ de qualquer vértice (interno) de v são ordenados de acordo com a ordem de seus rótulos, isto é, de tal modo que $v^1 < v^2 < ... < v^{s_v}$.

Fixe $(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n) \in \mathcal{P}^{n+1}$ tal que $G(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)$ (isto é, o grafo de vértices $\{0, 1, ..., n\}$ e elos $E(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n) = \{\{i, j\} : \gamma_i \nsim \gamma_j\}$) é conexo.

Notação 1.1.

$$T_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)} = \{\tau \in T_n^0 : \tau \subset G(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)\}$$

Considere $\tau \in T_n^0$ e denotemos E_τ seu conjunto de elos. Para cada vértice $i \in \tau$, lembremos que $d(i)$ denota a profundidade do vértice i (isto é, a distância até 0) e que i' é pai de i.

Definição 1.1. *O conjunto das árvores de Penrose de $G(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)$ o qual denotamos por $P_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}$ é formado pelas árvores $\tau \in T_n^0$ tal que*

(t0) se $\{i, j\} \in E_\tau$, então $\{i, j\} \in E(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n) \iff \gamma_i \nsim \gamma_j$;

(t1) se dois vértices i e j são irmãos, então $\{i, j\} \notin E(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n) \iff \gamma_i \sim \gamma_j$;

(t2) se dois vértices i e j são tais que $d(i) = d(j)$, *então* $\{i,j\} \notin E(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n) \Longleftrightarrow \gamma_i \sim \gamma_j$;

(t3) se dois vértices i e j são tais que $d(j) = d(i) - 1$ *e* $j < i'$, *então* $\{i,j\} \notin E(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n) \Longleftrightarrow \gamma_i \sim \gamma_j$.

Note que usando a identidade anterior, podemos reescrever a série formal (1.6) como

$$\begin{aligned} |\Pi|_{\gamma_0}(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1,...,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n} \sum_{\tau\in T_n^0} \mathbb{1}_{\tau\in P_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}} \rho(\gamma_1)\cdots\rho(\gamma_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\tau\in T_n^0} \sum_{(\gamma_1,...,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n} \mathbb{1}_{\tau\in P_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}} \rho(\gamma_1)\cdots\rho(\gamma_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\tau\in T_n^0} \phi_{\gamma_0}(\tau), \end{aligned} \tag{1.13}$$

onde

$$\phi_{\gamma_0}(\tau) = \sum_{(\gamma_1,...,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n} \mathbb{1}_{\tau\in P_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}} \rho(\gamma_1)\cdots\rho(\gamma_n). \tag{1.14}$$

A estrutura da equação (1.13) é crucial. Esta equação mostra que a série formal $|\Pi|_{\mathcal{P}}^{\gamma_0}(\rho)$ pode ser reorganizada como a soma sobre todos os termos associados às árvores rotuladas.

Enfatizamos aqui que o fator $\phi_{\gamma_0}(\tau)$ depende apenas da árvore rotulada τ por causa da Condição de Penrose *(t3)* que depende, de fato, da árvore rotulada.

Veremos logo abaixo que novas cotas podem ser obtidas escolhendo uma família de árvores $\tilde{P}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}$ tal que $P_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)} \subset \tilde{P}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)} \subset T_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}$.

Três possíveis escolhas de $\tilde{P}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}$ nos fornecerão os critérios conhecidos para a convergência das expansões do gás de polímeros abstratos.

Definição 1.2. *O conjunto das árvores fracas de Penrose de* $G(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)$ *que denotamos por* $P^{\mathrm{FP}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}$ *é formado por todas as árvores* τ *e conjunto de vértices* $\{0, 1, ..., n\}$ *com elo* E_τ *tal que*

(t0) *se* $\{i,j\} \in E_\tau$, *então* $\gamma_i \nsim \gamma_j$ *(i.e.* $\tau \subset G(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)$*)*

$(t1)^{\mathrm{FP}}$ *se i e j são irmãos, então* $\gamma_i \sim \gamma_j$.

Definição 1.3. *O conjunto das árvores de Dobrushin de* $G(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)$ *que denotamos por* $P^{\mathrm{D}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}$ *é o conjunto de todas as árvores* τ *com vértices* $\{0, 1, ..., n\}$ *e elos* E_τ *tal que*

(t0) *se* $\{i,j\} \in E_\tau$, *então* $\gamma_i \nsim \gamma_j$ *(i.e.* $\tau \subset G(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)$*)*

$(t1)^{\mathrm{D}}$ *se i e j são irmãos, então $\gamma_i \neq \gamma_j$.*

Definição 1.4. *O conjunto das árvores de Koteckŷ-Preiss de $G(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)$, que denotamos por $P^{\mathrm{KP}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}$, contém as árvores τ com vértices $\{0, 1, ..., n\}$ e elos E_τ tais que*

$(t0)$ se $\{i, j\} \in E_\tau$, então $\gamma_i \nsim \gamma_j$ (i.e. $\tau \subset G(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)$).

Note que, por definição,

$$P_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)} \subset P^{\mathrm{FP}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)} \subset P^{\mathrm{D}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)} \subset P^{\mathrm{KP}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)} \subset T_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)} \tag{1.15}$$

e, em particular, a definição (1.4) implica imediatamente que

$$P^{\mathrm{KP}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)} = T_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}, \tag{1.16}$$

de modo que, por (1.15), obtemos as cotas

$$|\phi^{\mathrm{T}}(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)| \leq |P^{\mathrm{FP}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}| = \sum_{\tau \in T^0_n} \mathbb{1}_{\tau \in P^{\mathrm{FP}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}} \tag{1.17}$$

$$\leq |P^{\mathrm{D}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}| = \sum_{\tau \in T^0_n} \mathbb{1}_{\tau \in P^{\mathrm{D}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}} \tag{1.18}$$

$$\leq |P^{\mathrm{KP}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}| = \sum_{\tau \in T^0_n} \mathbb{1}_{\tau \in T_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}}. \tag{1.19}$$

Assim, podemos limitar os termos positivos das séries $\prod_{\gamma_0}(\rho)$ definidas em (1.6), usando a estimativa (1.17), que é a melhor dentre (1.17)-(1.19), conforme:

$$\begin{aligned}
|\textstyle\prod|_{\gamma_0}(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)\in \mathcal{P}^n} |\phi^{\mathrm{T}}(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)| \rho(\gamma_1) \cdots \rho(\gamma_n) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)\in \mathcal{P}^n} \sum_{\tau \in T^0_n} \mathbb{1}_{\tau \in P^{\mathrm{FP}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}} \rho(\gamma_1) \cdots \rho(\gamma_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in T^0_n} \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)\in \mathcal{P}^n} \mathbb{1}_{\tau \in P^{\mathrm{FP}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n)}} \rho(\gamma_1) \cdots \rho(\gamma_n).
\end{aligned}$$

E assim obtemos

$$|\textstyle\prod|_{\gamma_0}(\rho) \leq \prod^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(\rho), \tag{1.20}$$

onde

$$\prod^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in T^0_n} \phi^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(\tau, \rho) \tag{1.21}$$

com

$$\phi^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(\tau,\rho) = \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n} \mathbb{1}_{\tau\in P^{\mathrm{FP}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n)}} \rho(\gamma_1)\cdots\rho(\gamma_n). \tag{1.22}$$

Analogamente, usando as cotas (1.18) e (1.19) podemos definir mais duas séries que também podem majorar as séries $|\prod|^{\gamma_0}_{\mathcal{P}}(\rho)$, a saber:

$$\Pi^{\mathrm{D}}_{\gamma_0}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\tau\in T^0_n}\phi^{\mathrm{D}}_{\gamma_0}(\tau,\rho) \tag{1.23}$$

e

$$\Pi^{\mathrm{KP}}_{\gamma_0}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\tau\in T^0_n}\phi^{\mathrm{KP}}_{\gamma_0}(\tau,\rho), \tag{1.24}$$

com

$$\phi^{\mathrm{D}}_{\gamma_0}(\tau,\rho) = \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n} \mathbb{1}_{\tau\in P^{D}_{G(\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n)}} \rho(\gamma_1)\cdots\rho(\gamma_n) \tag{1.25}$$

e

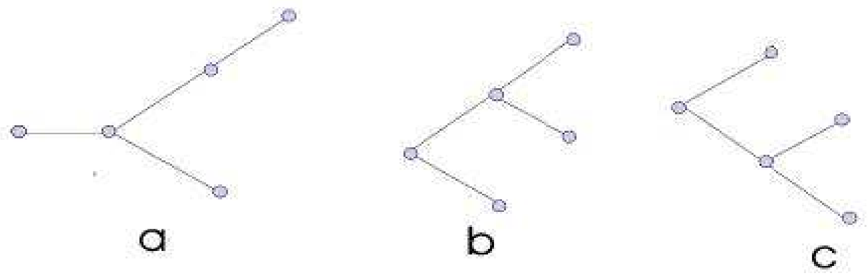
$$\phi^{\mathrm{KP}}_{\gamma_0}(\tau,\rho) = \sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n} \mathbb{1}_{\tau\in P^{\mathrm{KP}}_{G(\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n)}} \rho(\gamma_1)\cdots\rho(\gamma_n). \tag{1.26}$$

Aqui é importante ressaltar que, diferentemente do fator $\phi_{\gamma_0}(\tau)$ definido em (1.14), os três fatores $\phi^{\mathrm{FP,D,KP}}_{\gamma_0}(\tau)$ não dependem das rotulações da árvore τ, mas apenas de sua estrutura topológica. Isso significa que os termos da série $\Pi^{FP}_{\gamma_0}(\rho)$ podem ser agrupados junto com termos das árvores enraizadas não-rotuladas. Tornaremos esse conceito mais preciso na próxima seção. Concluímos essa seção lembrando que as desigualdades (1.17)-(1.19) imediatamente implicam que

$$|\Pi|_{\gamma_0}(\rho) \le \Pi^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(\rho) \le \Pi^{D}_{\gamma_0}(\rho) \le \Pi^{KP}_{\gamma_0}(\rho). \tag{1.27}$$

1.2 Reorganização das séries

Agora reorganizaremos a soma sobre todas as árvores rotuladas enraizadas que aparecem nas equações (1.21), (1.23) e (1.24) em termos das chamadas *árvores enraizadas planas*. Tal reorganização é motivada pela observação de que o fator $\phi^{\mathrm{FP,D,KP}}_{\gamma_0}$ não depende da rotulação dos vértices de τ, mas apenas de sua estrutura topológica. De fato, para cada árvore enraizada ordenada rotulada $\tau\in T^0_n$, podemos associar um desenho no plano conhecido como árvore enraizada plana associada a τ. O desenho de τ é obtido colocando-se pais na esquerda de seus filhos os quais são ordenados de cima para baixo de acordo com a ordem de seus rótulos. Por exemplo, a árvore enraizada plana com $n+1=5$ vértices associados às árvores a, b, e c com conjunto de elos $\{0,3\}$,$\{1,3\}$,$\{2,3\}$,$\{1,4\}$; $\{0,2\}$,$\{0,3\}$,$\{1,2\}$,$\{2,4\}$ e $\{0,2\}$,$\{0,4\}$,$\{4,3\}$,$\{1,4\}$, respectivamente, pode ser desenhada como:



Observe que na figura acima b e c são árvores enraizadas planas *diferentes* por causa da regra de ordenação dos filhos de cima para baixo.

Nesse sentido, definimos uma aplicação $m:\tau\mapsto m(\tau)$ que associa a cada árvore rotulada $\tau\in T_n^0$ um único desenho $t=m(\tau)$ no plano chamada árvore enraizada plana *associada a* τ. Denotamos por $\mathcal{T}_n^0$ o conjunto de todas as árvores enraizadas planas com n vértices e por $\mathbb{T}^{0,k}$ o conjunto das árvores enraizadas planas com geração máxima de número k; além disso, $\mathcal{T}^0=\cup_{n\geq 0}\mathcal{T}_n^0=\cup_{k\geq 0}\mathbb{T}^{0,k}$ denota o conjunto de todas as árvores enraizadas planas. Um elemento $t\in\mathcal{T}_n^0$ pode também ser visto como uma classe de elementos $t\in T_{n+1}$ com relação de equivalência tal que dois elementos τ e τ' são equivalentes se produzirem a mesma árvore enraizada plana. Assim, escrevemos $\tau\in t$, com $t\in\mathcal{T}_n^0$, para dizer que τ é um elemento do conjunto de todas as árvores rotuladas em T_n^0 que produz a mesma árvore enraizada ordenada plana. Uma maneira alternativa de definir esta relação de equivalência em T_n^0 é através de permutações dos rótulos $\{0,1,...,n\}$, a saber, dizemos que $\tau'\in T_n^0$ é equivalente a $\tau\in T_n^0$ se existe uma permutação σ em $\{0,1,...,n\}$ preservando a ordem dos filhos em cada vértice de τ tal que $\tau'=\sigma(\tau)$ (aqui $\sigma(\tau)$ é o grafo com vértices $V_{\sigma(\tau)}=\{0,\sigma(1),...,\sigma(n)\}$ e elos $E_{\sigma(\tau)}=\{\{\sigma(i),\sigma(j)\}:\{i,j\}\in E_{\tau'}\}$).

Claramente a aplicação $\tau\mapsto m(\tau)=t$ é sobrejetora e a cardinalidade da pré-imagem da árvore enraizada plana t (= número de maneiras de rotular n vértices não-raízes da árvore com n distintos rótulos de acordo com a regra de cima para baixo) é dada por

$$|\{\tau\in T_n^0:m(\tau)=t\}|=\frac{n!}{\prod_{v\succ 0}s_{v_i}!}.$$

De fato, é muito fácil contar quantas árvores rotuladas $\tau\in T_n^0$ pertencem à mesma classe equivalente de t, isto é, associadas à mesma árvore enraizada plana. Basta contar todas as permutações σ de $\{0,1,...,n\}$ que deixa a raiz intacta e com respeito à ordem dos filhos em qualquer vértice. Seja $\tau \in T_n^0$ e $t = [\tau]$ a árvore plana associada a τ e caracterizada pela seqüência $\{s_v\}_{v \leq v_0}$, então

$$|[\tau]| = \frac{n!}{\prod_{v \succ 0} s_{v_i}!}$$

Note que $n!$ é o número de todas as permutações no conjunto $\{1, 2, ...\}$ enquanto que para cada vértice v, $s_v!$ são as permutações dos filhos. Assim, $n!/\prod_{v \succ 0} s_{v_i}!$ é o número de permutações dos vértices de τ diferentes da raiz que não mudam a ordem dos filhos em cada vértice.

Uma árvore enraizada plana $t \in \mathbb{T}_{v_0}$ pode ser representada de maneira única como uma seqüência hierárquica de inteiros. A saber, associamos um inteiro $s_{v_0} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ à raiz v_0. Se $s_{v_0} = 0$, então t é uma árvore trivial (isto é, formada apenas pela raiz) e $w_{\gamma,|\rho|}(t) = 1$. Se $s_{v_0} \geq 1$, então isso significa que a raiz ramifica (da esquerda para direita no desenho) em s_{v_0} elos que terminam em s_{v_0} vértices $v_0^1, \ldots, v_0^{s_{v_0}}$ (os filhos da raiz), e por convenção, elas são ordenadas de cima para baixo no desenho, isto é, de tal modo que o vértice v_0^1 está no topo e $v_0^{s_{v_0}}$ em baixo. Para continuar a construção de t, associamos a cada vértice $v_0^1, \ldots, v_0^{s_{v_0}}$ números inteiros não-negativos $s_{v_0^1}, \ldots, s_{v_0^{s_{v_0}}}$.

Isso significa que cada vértice v_0^i $(i = 1, \ldots s_{v_0})$ se ramifica em $s_{v_0^i}$ elos (se $s_{v_0^i} = 0$ então v_0^i é uma folha e o processo termina) e assim por diante até o vértice $v_0^{s_{v_0}}$ que ramifica em $s_{v_0^{s_{v_0}}}$ elos. O processo é então interativo. Assim, qualquer t é unicamente representado por uma seqüência hierárquica de números inteiros não-negativos

$$\{s_{v_0}, \quad s_{v_0^1}, \ldots, s_{v_0^{s_{v_0}}}, \quad s_{v_0^{1,1}}, \ldots, s_{v_0^{1, s_{v_0^1}}}, \ldots, s_{v_0^{s_{v_0}}}, s_{v_0^{s_{v_0},1}}, \ldots, s_{v_0^{s_{v_0}, s_{v_0^1}}}, \quad \ldots, \}.$$

Vamos denotar de forma abreviada a árvore enraizada plana como

$$t = \{s_v\}_{v \succeq v_0}.$$

Agora observe que o fator $\phi_{\gamma_0}^{\mathrm{FP,D,KP}}$ depende, na verdade, apenas da árvore enraizada plana associada a τ. De fato temos:

$$\phi_{\gamma_0}^{\mathrm{FP}}(\tau, \rho) = \phi_{\gamma_0}^{\mathrm{FP}}([\tau], \rho) = \phi_{\gamma_0}^{\mathrm{FP}}(t, \rho) = \prod_{v \succeq 0} \left[\sum_{\substack{(\gamma^{v_1}, \ldots, \gamma^{v_{s_v}}) \in \mathcal{P}^{s_v} \\ v^i \not\sim \gamma_v, \ \gamma_{v^i} \sim \gamma_{v^j}}} \rho_{\gamma_{v^1}} \ldots \rho_{\gamma_{v^{s_v}}} \right]. \tag{1.28}$$

Note que como em cada vértice v a soma sobre os polímeros $\gamma^{v_1}, \ldots, \gamma^{v_{s_v}}$ associados aos filhos de v dependem dos polímeros γ_v associados a v, na expressão acima a ordem do produto é relevante e é organizada de tal modo que os produtos correspondentes aos ancestrais estão à esquerda dos produtos correspondentes aos descendentes. Em (1.28) é também adotada a convenção de que o produto em parênteses é igual a 1 para o vértice v tal que $s_v = 0$.

Agora podemos reorganizar a soma do lado direito de (1.24) como:

$$
\begin{aligned}
\Pi^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in T^0_n} \phi^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(\tau, \rho) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{t\in \mathbb{T}^0_n} \sum_{\tau \in t} \phi^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(t,\rho) = \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{t\in \mathbb{T}^0_n} \phi^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(t,\rho) \sum_{\tau\in t} 1 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{t\in \mathbb{T}^0_n} \phi^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(t,\rho)|t| = \\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{t\in \mathbb{T}^0_n} \Big[\prod_{v\succeq 0} \frac{1}{s_v!}\Big] \phi^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(t,\rho) = \sum_{n\geq 0} \sum_{t\in \mathbb{T}^0_n} \prod_{v\succeq 0} \Bigg[\frac{1}{s_v!} \sum_{\substack{(\gamma^{v_1},\dots,\gamma^{v s_v})\in \mathcal{P}^{s_v} \\ v^i \not\sim \gamma_v,\ \gamma_{v^i}\sim \gamma_{v^j}}} \rho_{\gamma_{v^1}} \dots \rho_{\gamma_{v^{s_v}}} \Bigg].
\end{aligned}
$$

E portanto,

$$
\Pi^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(\underline{\rho}) = \sum_{t\in \mathbb{T}^0} \prod_{v\succeq 0} \left\{ \frac{1}{s_v!} \sum_{(\gamma^{v_1},\dots,\gamma^{v s_v})\in \mathcal{P}^{s_v}} \prod_{i=1}^{s_v} \mathbb{1}_{\{\gamma_{v^i}\not\sim \gamma_v\}} \prod_{1\leq i<j\leq s_v} \mathbb{1}_{\{\gamma_{v^i}\sim \gamma_{v^j}\}} \rho_{\gamma_{v^1}} \dots \rho_{\gamma_{v^{s_v}}} \right\}. \quad (1.29)
$$

De forma completamente análoga, também obtemos:

$$
\Pi^{\mathrm{D}}_{\gamma_0}(\underline{\rho}) = \sum_{t\in \mathbb{T}^0} \prod_{v\succeq 0} \left\{ \frac{1}{s_v!} \sum_{(\gamma^{v_1},\dots,\gamma^{v s_v})\in \mathcal{P}^{s_v}} \prod_{i=1}^{s_v} \mathbb{1}_{\{\gamma_{v^i}\not\sim \gamma_v\}} \prod_{1\leq i<j\leq s_v} \mathbb{1}_{\{\gamma_{v^i}\neq \gamma_{v^j}\}} \rho_{\gamma_{v^1}} \dots \rho_{\gamma_{v^{s_v}}} \right\} \quad (1.30)
$$

e

$$
\Pi^{\mathrm{KP}}_{\gamma_0}(\underline{\rho}) = \sum_{t\in \mathbb{T}^0} \prod_{v\preceq 0} \left\{ \frac{1}{s_v!} \sum_{(\gamma^{v_1},\dots,\gamma^{v s_v})\in \mathcal{P}^{s_v}} \prod_{i=1}^{s_v} \mathbb{1}_{\{\gamma_{v^i}\not\sim \gamma_v\}} \rho_{\gamma_{v^1}} \dots \rho_{\gamma_{v^{s_v}}} \right\}. \quad (1.31)
$$

1.3 Árvores e convergência

Começamos definindo um domínio apropriado no espaço das funções $(0,\infty)^{\mathcal{P}}$.

Dadas duas funções μ and ν em $(0,\infty)^{\mathcal{P}}$, dizemos que $\mu < \nu$ se, e somente se $\mu_\gamma < \nu_\gamma$ para todo $\gamma \in \mathcal{P}$.

Considere para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $(\gamma_0\gamma_1,\dots,\gamma_n) \in \mathcal{P}^{n+1}$, números $b_n(\gamma_0;\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ tais que $b_n(\gamma_0;\gamma_1,\dots,\gamma_n) \geq 0$. Uma vez que os números $b_n(\gamma_0;\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ são dados, podemos definir a função

$$
\varphi^b : (0,\infty)^{\mathcal{P}} \to (0,\infty]^{\mathcal{P}} : u \mapsto \varphi^b(u)
$$

com entradas

$$
[\varphi^b(u)](\gamma) \doteq \varphi^b_\gamma(u) = 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in \mathcal{P}^n} b_n(\gamma;\gamma_1,\dots,\gamma_n)\, u(\gamma_1)\dots u(\gamma_n). \quad (1.32)
$$

Definindo o conjunto

$$\mathcal{D}^b = \Big\{ u \in (0,\infty)^{\mathcal{P}} : \ \ \varphi_\gamma^b(u) < +\infty, \ \forall \gamma \in \mathcal{P} \Big\},$$

a restrição de φ a $\mathcal{D}^b$ é uma função em $(0,\infty)^{\mathcal{P}}$, ou seja,

$$\varphi_\gamma^b(u) \ < \ \infty, \ \forall \gamma \in \mathcal{P}, \ \text{ onde } u \in \mathcal{D}^b.$$

Note também que se $u \in \mathcal{D}^b$ e $u' < u$, então também $u' \in \mathcal{D}^b$.

Seja agora $\mu : \mathcal{P} \to (0,\infty)$ uma função no conjunto $\mathcal{D}^b \subset (0,\infty)^{\mathcal{P}}$ e seja $r \in (0,\infty)^{\mathcal{P}}$ definido por

$$r = \frac{\mu}{\varphi^b(\mu)}, \tag{1.33}$$

ou seja, as entradas de r são dadas por

$$r(\gamma_0) = \frac{\mu(\gamma_0)}{\varphi_{\gamma_0}^b(\mu)} \tag{1.34}$$

quando γ_0 varia em $\mathcal{P}$.

Note que $r \in \mathcal{D}^b$ porque, por construção, $r < \mu$, pois $\mu < \varphi^b(\mu)$. Além disso, a hipótese $\mu \in (0,\infty)^{\mathcal{P}}$ é equivalente a

$$\mu(\gamma) > 0, \qquad \text{para todo } \gamma_0 \in \mathcal{P}, \tag{1.35}$$

enquanto que a hipótese $\mu \in \mathcal{D}^b$ significa

$$\varphi_\gamma(\mu) < +\infty, \qquad \text{para todo } \gamma \in \mathcal{P}. \tag{1.36}$$

As hipóteses (1.35) e (1.36) garantem que $r \in (0,\infty)^{\mathcal{P}}$, ou seja,

$$r(\gamma) > 0, \qquad \text{para todo } \gamma \in \mathcal{P}.$$

Considere agora, para qualquer $\rho \in \mathcal{D}^p$, a aplicação $T^\rho = \rho\varphi^b$, onde

$$T^\rho : (0,\infty)^{\mathcal{P}} \to (0,\infty]^{\mathcal{P}} : u \mapsto T^\rho(u)$$

com entradas

$$[T^\rho(u)](\gamma) \doteq T_\gamma(u) = \rho(\gamma)\varphi_\gamma(u), \qquad \gamma \in \mathcal{P}.$$

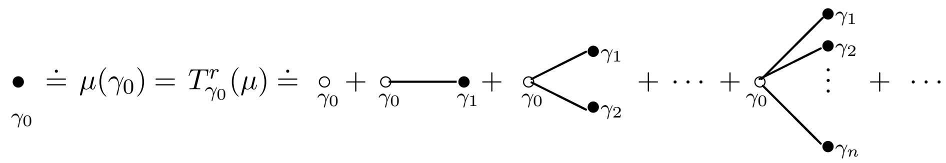
De (1.34) obtemos:

$$\mu = T^r(\mu) \tag{1.37}$$

isto é, μ é um ponto fixo da aplicação T^r. Então, por (1.37) temos que, para todo $\gamma_0 \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}\mu(\gamma_0) &= T^r_{\gamma_0}(\mu)\\ &= r(\gamma_0) \ + \ r(\gamma_0)\sum_{\gamma_1\in\mathcal{P}} b_1(\gamma_0;\gamma_1)\,\mu(\gamma_1) + r(\gamma_0)\sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathcal{P}^2} b_2(\gamma_0;\gamma_1,\gamma_2)\,\mu(\gamma_1)\mu(\gamma_n) + \ \dots\\ &\qquad \dots \ + \ r(\gamma_0)\sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n} b_n(\gamma_0;\gamma_1,\dots,\gamma_n)\,\mu(\gamma_1)\dots\mu(\gamma_n). \qquad (1.38)\end{aligned}$$

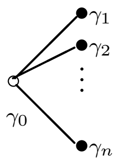
De acordo com a definição (1.32) of $\varphi_\gamma(\mu)$, a equação (1.38) pode ser visualizada através de diagramas:



onde

$$\circ_{\gamma_0} = r(\gamma_0)$$

e, para qualquer $n \geq 1$,



$$= \quad r(\gamma_0) \sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n} b_n(\gamma_0;\gamma_1,\dots,\gamma_n)\,\mu_(\gamma_1)\dots\mu_(\gamma_n)$$

A interação $[T^r]^2(\mu) = T^r(T^r(\mu))$ corresponde à troca de cada círculo fechado por cada um dos diagramas da expansão para T^r.

Isto nos conduz à árvore enraizada plana acima para duas gerações, com círculos abertos para os vértices de primeira geração e círculos fechados para os de segundas gerações. A k-ésima interação de T envolve todas as possíveis árvores enraizadas planas previamente vistas com geração até k. Em cada árvore da expansão, os vértices da última geração são ocupados por círculos fechados e todos os outros por círculos abertos. Denotamos por $\mathbb{T}^{0,k}$ o conjunto das árvores cujos vértices tem profundidade máxima k. Um argumento padrão de indução mostra que:

$$[T^r]^k_{\gamma_0}(\mu) \ = \ r_{\gamma_0}\Big[\sum_{\ell=0}^{k-1}\Phi^{(\ell)}_{\gamma_0}(r) + R^{(k)}_{\gamma_0}(r,\mu)\Big] \qquad (1.39)$$

com

$$\Phi^{(\ell)}_{\gamma_0}(r) \;=\; \sum_{t\in\mathbb{T}^{0,\ell}} \prod_{v\succeq 0} \left\{ \sum_{(\gamma_{v^1},\ldots,\gamma_{v^{s_v}})\in\mathcal{P}^{s_v}} b_{s_v}(\gamma_v;\gamma_{v^1},\ldots,\gamma_{v^{s_v}})\, r(\gamma_{v^1})\ldots r(\gamma_{v^{s_v}}) \right\}, \tag{1.40}$$

enquanto que

$$R^{(k)}_{\gamma_0}(r,\mu) = \sum_{t\in\mathbb{T}^{0,k}} \prod_{v\succeq 0} \left\{ \sum_{(\gamma_{v^1},\ldots,\gamma_{v^{s_v}})\in\mathcal{P}^{s_v}} b_{s_v}(\gamma_v;\gamma_{v^1},\ldots,\gamma_{v^{s_v}})\, \chi^{t,v^1}_{\gamma_{v^1}}\ldots\chi^{t,v^{s_v}}_{\gamma_{v^{s_v}}}, \right\} \tag{1.41}$$

onde

$$\chi^{t,v}_{\gamma_v} = \begin{cases} \rho(\gamma) & \text{se } d(v) < k \\ \mu(\gamma) & \text{se } d(v) = k \end{cases} \tag{1.42}$$

lembrando que $d(v)$ indica a profundidade de v em t. Em outras palavras, $R^{(k)}_{\gamma_0}(r,\mu)$ tem uma expressão similar a $\Phi^{(k)}_{\gamma_0}(r)$, mas com atividades dos vértices da k-ésima geração com pesos dados por μ. Por definição $b_0(\gamma_v)\equiv 1$. Agora, por (1.38), temos

$$[T^r]^k_{\gamma_0}(\mu) \;=\; \mu_{\gamma_0}$$

o que implica imediatamente, através de (1.39),

$$r_{\gamma_0}\sum_{\ell=0}^{k-1}\Phi^{(\ell)}_{\gamma_0}(r) \;\leq\; \mu_{\gamma_0} \text{ para todo } k\in\mathbb{N}\,. \tag{1.43}$$

A equação (1.43) implica no seguinte teorema:

Teorema 1.1. (Fernández-Procacci) *Seja μ uma função $\mu\in(0,\infty)^{\mathcal{P}}$ e, para qualquer $\gamma\in\mathcal{P}$, seja $\varphi_\gamma(\mu)$ a função definida em (1.32) satisfazendo (1.36). Considere $r\in(0,\infty)^{\mathcal{P}}$ definida por (1.34). Então, para todo $\rho\leq r$,*

i) A série

$$\Phi^b_{\gamma_0}(\rho) \;:=\; \sum_{t\in\mathbb{T}^0} \prod_{v\succeq 0} \left\{ \sum_{(\gamma_{v^1},\ldots,\gamma_{v^{s_v}})\in\mathcal{P}^{s_v}} b_{s_v}(\gamma_v;\gamma_{v^1},\ldots,\gamma_{v^{s_v}})\, \rho(\gamma_{v^1})\ldots\rho(\gamma_{v^{s_v}}) \right\} \tag{1.44}$$

converge para cada $\gamma_0\in\mathcal{P}$ e admite, para cada $\gamma_0\in\mathcal{P}$, a cota

$$\Phi^b_{\gamma_0}(\rho)\leq\Phi^b_{\gamma_0}(r)\leq\varphi^b_{\gamma_0}(\mu). \tag{1.45}$$

ii)

$$\rho(\gamma_0)\Phi^b_{\gamma_0}(\rho) = \lim_{n\to\infty}[T^\rho]^n_{\gamma_0}(\rho) \tag{1.46}$$

e $\rho(\gamma)\Phi^b_\gamma(\rho)$ é solução da equação (1.38), ou seja, é um ponto fixo da aplicação com

$$\rho(\gamma)\Phi^b_\gamma(\rho) = T^\rho_{\gamma_0}\Big(\rho(\gamma)\Phi^b_\gamma(\rho)\Big). \tag{1.47}$$

Prova: i) Por (1.39) temos

$$r(\gamma_0)\sum_{\ell=0}^{n}\Phi_{\gamma_0}^{(\ell)}(r) \;\leq\; T_{\gamma_0}^{n+1}(\mu),\;\; \forall n\in\mathbb{N}$$

mas, pela definição em (1.38) temos que, para todo $k\in\mathbb{N}$, $T_{\gamma_0}^{k}(\mu)=\mu_{\gamma_0}$. Então, obtemos

$$r(\gamma_0)\sum_{\ell=0}^{n}\Phi_{\gamma_0}^{(\ell)}(r) \;\leq\; \mu(\gamma_0),\;\; \forall n$$

isto é, por (1.34),

$$\sum_{\ell=0}^{n}\Phi_{\gamma_0}^{(\ell)}(r) \;\leq\; \varphi_{\gamma_0}^{b}(\mu),\;\; \forall n$$

e assim, por monotonicidade e para qualquer $\rho\leq r$,

$$\Phi_{\gamma_0}^{b}(\rho)\leq\Phi_{\gamma_0}^{b}(r)\leq\varphi_{\gamma_0}^{b}(\mu).$$

ii) Novamente, por (1.39),

$$[T^{\rho}]_{\gamma_0}^{k}(\rho) \;=\; \rho(\gamma_0)\Big[\sum_{\ell=0}^{k-1}\Phi_{\gamma_0}^{(\ell)}(\rho)+R_{\gamma_0}^{(k)}(\rho,\mu)|_{\mu=\rho})\Big]. \tag{1.48}$$

Lembrando a definição em (1.42) temos,

$$\begin{aligned} R_{\gamma_0}^{(k)}(\rho,\mu)|_{\mu=\rho}) \;&=\; \sum_{t\in\mathbb{T}^{0,k}}\prod_{v\succeq 0}\left\{\sum_{(\gamma_{v^1},\ldots,\gamma_{v^{s_v}})\in\mathcal{P}^{s_v}} b_{s_v}(\gamma_0;\gamma_{v^1},\ldots,\gamma_{v^{s_v}})\,\rho(\gamma_{v^1})\ldots\rho(\gamma_{v^{s_v}})\right\} \\ &=\; \Phi_{\gamma_0}^{(k)}(\rho) \end{aligned}$$

daí

$$[T^{\rho}]_{\gamma_0}^{k}(\rho) \;=\; \rho(\gamma_0)\sum_{\ell=0}^{k}\Phi_{\gamma_0}^{(\ell)}(\rho),$$

e assim, para qualquer $\rho\leq r$,

$$\lim_{k\to\infty}[T^{\rho}]_{\gamma_0}^{k}(\rho) \;=\; \lim_{k\to\infty}\rho_{\gamma_0}\sum_{\ell=0}^{k}\Phi_{\gamma_0}^{(\ell)}(\rho) \;=\; \rho(\gamma_0)\lim_{k\to\infty}\sum_{\ell=0}^{k}\Phi_{\gamma_0}^{(\ell)}(\rho) \;=\; \rho(\gamma_0)\Phi_{\gamma_0}^{b}(\rho).$$

Finalmente, para todo $\rho\leq r$,

$$\begin{aligned} \rho(\gamma_0)\Phi_{\gamma_0}(\rho) \;&=\; \lim_{n\to\infty}[T^{\rho}]_{\gamma_0}^{n+1}(\rho) \;=\; \lim_{n\to\infty}T_{\gamma_0}^{\rho}\Big([T^{\rho}]_{\gamma_0}^{n}(\rho)\Big) \;=\; \rho(\gamma_0)\lim_{n\to\infty}\varphi_{\gamma}\Big([T^{\rho}]_{\gamma_0}^{n}(\rho)\Big) = \\ &=\; \rho(\gamma_0)\varphi_{\gamma}\Big(\lim_{n\to\infty}[T^{\rho}]_{\gamma_0}^{n}(\rho)\Big) \;=\; \rho(\gamma_0)\varphi_{\gamma}\Big(\rho(\gamma_0)\Phi_{\gamma_0}^{b}(\rho)\Big) \;=\; T_{\gamma_0}\Big(\rho(\gamma_0)\Phi_{\gamma_0}^{b}(r)\Big). \end{aligned}$$

$\square$

1.4 Critérios de Convergência

Critério de Fernández-Procacci.

Considere a escolha

$$b_n(\gamma_0;\gamma_1,\dots,\gamma_n) = b_n^{\mathrm{FP}}(\gamma_0;\gamma_1,\dots,\gamma_n) \doteq \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\gamma_i \not\sim \gamma} \prod_{1\le i<j\le n}\mathbb{1}_{\{\gamma_i\sim\gamma_j\}} \tag{1.49}$$

e também

$$\varphi_{\gamma_0}^{b^{\mathrm{FP}}}(\mu) \;=\; 1+\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n\\ \gamma_i\not\sim\gamma_0,\ \gamma_i\sim\gamma_j}}\mu(\gamma_1)\dots\mu(\gamma_n) \;=\; \Xi_{\mathcal{P}_{\gamma_0}}(\mu). \tag{1.50}$$

Então, pelo Teorema 1.1, a série

$$\Phi_{\gamma_0}^{b^{\mathrm{FP}}}(r) \;=\; \sum_{t\in\mathbb{T}^0}\prod_{v\succeq 0}\left\{\sum_{(\gamma_{v^1},\dots,\gamma_{v^{s_v}})\in\mathcal{P}^{s_v}}\frac{1}{s_v!}\prod_{i=1}^{s_v}\mathbb{1}_{\gamma_{v^i}\not\sim\gamma}\prod_{1\le i<j\le s_v}\mathbb{1}_{\{\gamma_{v^i}\sim\gamma_{v^j}\}}\, r(\gamma_{v^1})\dots r(\gamma_{v^{s_v}})\right\} \tag{1.51}$$

converge.

Comparando (1.29) com (1.51) temos

$$\Pi_{\gamma_0}^{\mathrm{FP}}(\rho) = \Phi_{\gamma_0}^{b^{\mathrm{FP}}}(\rho).$$

Assim, obtemos, pelo Teorema 1.1, o seguinte critério para convergência das expansões em polímeros:

Corolário 1.3. (Critério de Fernández-Procacci) *Escolha $\mu \in \tilde{\mathcal{D}} \subset (0,\infty)^{\mathcal{P}}$ e seja $R^{\mathrm{FP}} \in (0,\infty)^{\mathcal{P}}$ tal que*

$$R^{\mathrm{FP}}(\gamma_0) = \frac{\mu(\gamma_0)}{\Xi_{\mathcal{P}_{\gamma_0}}(\mu)}. \tag{1.52}$$

Seja ρ tal que

$$\rho(\gamma) \;\le\; R^{\mathrm{FP}}(\gamma) \;\; \forall\gamma\in\mathcal{P}. \tag{1.53}$$

Então, a série $|\Pi|_{\gamma_0}(\rho)$ definida em (1.6) é finita para cada $\gamma_0\in\mathcal{P}$ e

$$|\Pi|_{\gamma_0}(\rho) \le \Xi_{\mathcal{P}_{\gamma_0}}(\mu) \tag{1.54}$$

logo,

$$\rho(\gamma_0)|\Pi|_{\gamma_0}(\rho) \le \mu(\gamma_0) \tag{1.55}$$

para cada $\gamma_0\in\mathcal{P}$.

Prova: Pelo Teorema 1.1, temos que a série $\Pi^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(\rho)$ definida em (1.21) é finita para cada $\gamma_0 \in \mathcal{P}$ e para todo ρ tal que $\rho(\gamma) \leq R^{\mathrm{FP}}(\gamma)$, onde $R^{\mathrm{FP}}(\gamma)$ está definido em (1.53). Além disso,

$$\Pi^{\mathrm{FP}}_{\gamma_0}(\rho) \leq \Xi_{\mathcal{P}_{\gamma_0}}(\mu)$$

para cada $\gamma_0 \in \mathcal{P}$. Usando agora (1.20), concluímos que o mesmo é válido também para a série $|\Pi|^{\gamma_0}_{\mathcal{P}}(\rho)$. □

<u>*Critério de Dobrushin*</u>.

Se escolhermos agora

$$b^{\mathrm{D}}_n(\gamma_0;\gamma_1,\ldots,\gamma_n) = b^{\mathrm{D}}_n(\gamma_0;\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \doteq \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\gamma_i \not\sim \gamma} \prod_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{1}_{\{\gamma_i \neq \gamma_j\}}, \tag{1.56}$$

decorre que

$$\varphi^{b^{\mathrm{D}}}_{\gamma_0}(\underline{\mu}) \;=\; 1 + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!} \sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n \\ \gamma_0 \nsim \gamma_i\,,\, \gamma_i\neq\gamma_j}} \mu(\gamma_1)\ldots\mu(\gamma_n) \;=\; \prod_{\gamma \nsim \gamma_0}[1+\mu(\gamma)]\,, \tag{1.57}$$

Então, novamente pelo Teorema 1.1 a série

$$\Phi^{b^{\mathrm{D}}}_{\gamma_0}(r) \;=\; \sum_{t\in\mathbb{T}^0}\prod_{v\succeq 0}\left\{ \sum_{(\gamma_{v^1},\ldots,\gamma_{v^{s_v}})\in\mathcal{P}^{s_v}} \frac{1}{s_v!}\prod_{i=1}^{s_v}\mathbb{1}_{\gamma_{v^i}\not\sim\gamma} \prod_{1\leq i<j\leq s_v} \mathbb{1}_{\{\gamma_{v^i}\neq\gamma_{v^j}\}}\, r(\gamma_{v^1})\ldots r(\gamma_{v^{s_v}})\right\} \tag{1.58}$$

converge.

Comparando (1.30) com (1.58) obtemos

$$\Pi^{\mathrm{D}}_{\gamma_0}(\rho) = \Phi^{b^{\mathrm{D}}}_{\gamma_0}(\rho).$$

Então, o Teorema 1.1 também estabelece o seguinte critério para a convergência das expansões em polímeros:

Corolário 1.4 (Critério de Dobrushin). *Escolha $\mu \in (0,\infty)^{\mathcal{P}}$ e seja $R^{\mathrm{D}} \in (0,\infty)^{\mathcal{P}}$ tal que*

$$R^{\mathrm{D}}(\gamma) = \frac{\mu(\gamma)}{\prod_{\tilde\gamma\nsim\gamma}[1+\mu(\tilde\gamma)]} \tag{1.59}$$

Considere $\rho \in [0,\infty)^{\mathcal{P}}$ tal que

$$\rho(\gamma) \;\leq\; R^{\mathrm{D}}(\gamma) \;=\; \frac{\mu(\gamma)}{\prod_{\tilde\gamma\nsim\gamma}[1+\mu(\tilde\gamma)]},\quad \forall\gamma\in\mathcal{P}. \tag{1.60}$$

Então, a série $|\Pi_{\gamma_0}|(\rho)$ definida em (1.6) é finita para cada $\gamma \in \mathcal{P}$ e

$$|\Pi_\gamma|(\rho) \leq \prod_{\tilde{\gamma} \nsim \gamma} [1 + \mu(\tilde{\gamma})] \tag{1.61}$$

ou

$$\rho(\gamma)|\Pi_\gamma|(\rho) \leq \mu(\gamma) \tag{1.62}$$

para cada $\gamma_0 \in \mathcal{P}$.

Para os já habituados com a notação usual dos artigos de Mecânica Estatística lembramos a Condição de Dobrushin na sua forma usual [21, 11]. Nestes trabalhos, a condição (1.60) aparece como

$$\rho(\gamma) \ \leq \ R^{\mathrm{D}}_\gamma \ = (e^{\tilde{\mu}(\gamma)} - 1)e^{-\sum_{\tilde{\gamma} \in \mathcal{P}:\, \tilde{\gamma} \nsim \gamma} \tilde{\mu}(\tilde{\gamma})}, \ \ \forall \gamma \in \mathcal{P}.$$

Isto é claramente a mesma condição (1.60) se definimos

$$\tilde{\mu}(\gamma) = \log[1 + \mu(\gamma)]. \tag{1.63}$$

Para mostrar (1.61), usamos $|\Pi|_{\gamma_0}(\rho) \leq \Pi^{\mathrm{D}}_{\gamma_0}(\rho)$, de modo que

$$\frac{|\Pi_\gamma|(\rho)}{1 + \rho(\gamma)|\Pi_{\gamma_0}|(\rho)} \leq \frac{\Pi^{\mathrm{D}}_\gamma(\rho)}{1 + \rho(\gamma)\Pi^{\mathrm{D}}_{\gamma_0}(\rho)} = \frac{\Phi^{b^{\mathrm{D}}}_{\gamma_0}(\rho)}{1 + \rho(\gamma)\Phi^{b^{\mathrm{D}}}_\gamma(\rho)}.$$

Pelo Teorema 1.1 ii), $\rho\Phi^{b^{\mathrm{D}}}_{\gamma_0}(\rho)$ é ponto fixo da aplicação $T^\rho = \rho\phi^{b^{\mathrm{D}}}$, isto é, para todo $\gamma \in \mathcal{P}$ e para todo $\rho \leq R^{\mathrm{D}}$ temos

$$\rho(\gamma)\Phi^{b^{\mathrm{D}}}_\gamma(\rho) = \rho(\gamma)\phi^{b^{\mathrm{D}}}_\gamma\Big(\rho(\gamma)\Phi^{b^{\mathrm{D}}}_\gamma(\rho)\Big) = \rho(\gamma)\prod_{\tilde{\gamma} \nsim \gamma}[1 + \rho(\tilde{\gamma})\Phi^{b^{\mathrm{D}}}_{\tilde{\gamma}}(\rho)] \tag{1.64}$$

o que é equivalente a

$$\frac{\Phi^{b^{\mathrm{D}}}_\gamma(\rho)}{[1 + \rho(\gamma)\Phi^{b}_\gamma(\rho)]} = \prod_{\substack{\tilde{\gamma} \nsim \gamma \\ \tilde{\gamma} \neq \gamma}}[1 + \rho(\tilde{\gamma})\Phi^{b^{\mathrm{D}}}_{\tilde{\gamma}}(\rho)]. \tag{1.65}$$

Agora, por monotonicidade

$$\prod_{\substack{\tilde{\gamma} \nsim \gamma \\ \tilde{\gamma} \neq \gamma}}[1 + \rho(\tilde{\gamma})\Phi^{b^{\mathrm{D}}}_{\tilde{\gamma}}(\rho)] \leq \prod_{\substack{\tilde{\gamma} \nsim \gamma \\ \tilde{\gamma} \neq \gamma}}[1 + r(\tilde{\gamma})\Phi^{b^{\mathrm{D}}}_{\tilde{\gamma}}(r)] \leq \prod_{\substack{\tilde{\gamma} \nsim \gamma \\ \tilde{\gamma} \neq \gamma}}[1 + \mu(\tilde{\gamma})] \doteq k_\gamma(\mu).$$

Portanto, para qualquer $\rho \leq R^{\mathrm{D}}$, temos a cota

$$\frac{|\Pi_\gamma|(\rho)}{1 + \rho(\gamma)|\Pi_\gamma|(\rho)} \leq k_\gamma(\mu)$$

ou seja, para qualquer $\rho \leq R^{\rm D}$

$$|\Pi_\gamma|(\rho) \leq \frac{k_\gamma(\mu)}{1-\rho(\gamma)k_\gamma(\mu)}. \tag{1.66}$$

Note que esta cota é um pouco melhor do que (1.61) pois depende de $\rho(\gamma)$ em vez de $R^{\rm D}(\gamma)$. Assim, lembrando

$$|\Sigma_\gamma|(\rho) = \rho_\gamma \int_0^1 |\Pi_\gamma|(\rho_\alpha) d\alpha \tag{1.67}$$

e observando que

$$R^{\rm D}(\gamma)k_\gamma(\mu) = \frac{\mu(\gamma)}{1+\mu(\gamma)},$$

obtemos

$$\begin{aligned} |\Sigma_\gamma|(\rho) &= \rho_\gamma \int_0^1 |\Pi_\gamma|(\rho_\alpha) d\alpha \leq \rho_\gamma \int_0^1 \frac{k_\gamma(\mu)}{1-\alpha\rho(\gamma)k_\gamma(\mu)} d\alpha \\ &\leq \ln\left[\frac{1}{1-\rho(\gamma)k_\gamma(\mu)}\right] \leq \ln\left[\frac{1}{1-r(\gamma)k_\gamma(\mu)}\right] \\ &= \ln\left[1+\mu(\gamma)\right]. \end{aligned}$$

Critério Koteckỳ-Preiss.

Se escolhermos

$$b_n(\gamma_0;\gamma_1,\ldots,\gamma_n) = b_n^{\rm KP}(\gamma_0;\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \doteq \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\gamma_i \not\sim \gamma_0\}}$$

e

$$\varphi_{\gamma_0}^{\rm KP}(\underline{\mu}) \;=\; 1+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n \\ \gamma_0\not\sim\gamma_i\,,\,1\leq i\leq n}} \mu(\gamma_1)\ldots\mu(\gamma_n) \;=\; \exp\Big[\sum_{\gamma\not\sim\gamma_0}\mu(\gamma)\Big] \tag{1.68}$$

Então, mais uma vez pelo Teorema 1.1, a série

$$\Phi_{\gamma_0}^{b^{\rm KP}}(\rho) \;=\; \sum_{t\in\mathbb{T}^0}\prod_{v\succeq 0}\left\{\sum_{(\gamma_{v^1},\ldots,\gamma_{v^{s_v}})\in\mathcal{P}^{s_v}} \frac{1}{s_v!}\prod_{i=1}^{s_v}\mathbb{1}_{\gamma_{v^i}\not\sim\gamma}\;\; \rho(\gamma_{v^1})\ldots\rho(\gamma_{v^{s_v}})\right\} \tag{1.69}$$

converge para todo $\rho \leq r$.

Comparando (1.31) com (1.69), obtemos

$$\Pi_{\gamma_0}^{\rm KP}(\rho) = \Phi_{\gamma_0}^{b^{\rm KP}}(\rho),$$

donde surge o Critério de Koteckỳ and Preiss, a saber,

Corolário 1.5 (Critério de Kotecký-Preiss). *Escolha $\mu \in (0,\infty)^{\mathcal{P}}$ e seja $R^{\text{KP}} \in (0,\infty)^{\mathcal{P}}$ tal que*

$$R^{\text{KP}}_{\gamma_0} = \frac{\mu(\gamma_0)}{\exp\Big[\sum_{\gamma \not\sim \gamma_0} \mu(\gamma)\Big]}. \tag{1.70}$$

Considere $\rho \in [0,\infty)^{\mathcal{P}}$ com

$$\rho(\gamma) \ \leq \ R^{\text{KP}}_{\gamma} \ = \ \frac{\mu(\gamma_0)}{\exp\Big[\sum_{\gamma \not\sim \gamma_0} \mu(\gamma)\Big]}, \quad \forall \gamma \in \mathcal{P}. \tag{1.71}$$

Então a série $|\Pi_{\gamma_0}|(\rho)$ definida em (1.6) é finita para cada $\gamma_0 \in \mathcal{P}$ e

$$|\Pi_{\gamma_0}|(\rho) \leq \exp\Big[\sum_{\gamma \not\sim \gamma_0} \mu(\gamma)\Big] \tag{1.72}$$

ou

$$\rho(\gamma_0)|\Pi_{\gamma_0}|(\rho) \leq \mu(\gamma_0)$$

para cada $\gamma_0 \in \mathcal{P}$.

Resumindo, os critérios de convergência que obtivemos foram

$$\rho(\gamma) \ \leq \ R(\gamma) = \frac{\mu(\gamma)}{\varphi_{\gamma_0}(\mu)} \tag{1.73}$$

com

$$\varphi_\gamma(\mu) \ = \ \begin{cases} \exp\Big[\sum_{\tilde\gamma \not\sim \gamma} \mu(\tilde\gamma)\Big] & \text{(Kotecký-Preiss)} \\ \prod_{\tilde\gamma \not\sim \gamma}\big(1+\mu(\tilde\gamma)\big) & \text{(Dobrushin)} \\ \Xi_{\mathcal{P}_\gamma}(\mu) & \text{(Fernández-Procacci)} \end{cases} \tag{1.74}$$

Cada condição é estritamente mais fraca do que a anterior. A saber, desde que para $\mu \in (0,\infty)^{\mathcal{P}}$ fixo,

$$\Xi_{\mathcal{P}_\gamma}(\mu) \leq \prod_{\tilde\gamma \not\sim \gamma} \big[1+\mu(\tilde\gamma)\big] \leq \exp\Big[\sum_{\gamma \not\sim \gamma_0} \mu(\tilde\gamma)\Big],$$

então,

$$R^{\text{FP}}_{\gamma} \geq R^{\text{D}}_{\gamma} \geq R^{\text{KP}}.$$

Portanto, fica estabelecida a relação entre os critérios de convergência no caso do gás de polímeros abstratos, sendo o Critério de Fernández-Procacci o mais eficiente seguido de Dobrushin que, por sua vez, é mais eficiente do que o de Kotecký-Preiss.

O Critério de Fernández-Procacci já foi aplicado em exemplos importantes da Mecânica Estatística e provado para potenciais mais gerais, não necessariamente de interações do tipo caroço duro [30, 61, 59, 60, 75]. Faremos a comparação entre estes critérios aplicando-os em alguns exemplos na próxima seção.

1.5 Exemplos

1.5.1 Modelo dominó em $\mathbb{Z}^2$

O modelo dominó em $\mathbb{Z}^2$ foi primeiramente considerado por Dobrushin em [21]. Os elementos do espaço de polímeros $\mathcal{P}$ são pares de pontos vizinhos na rede bidimensional. Para qualquer $\gamma \in \mathcal{P}$ fazemos $\rho_\gamma = \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$. Dizemos que dois polímeros são incompatíveis se, e somente se, eles têm intersecção não-vazia.

Vamos assumir que as funções $\mu(\gamma)$ presentes nas condições de Kotecký-Preiss, Dobrushin e Fernández-Procacci, em (1.74), são constantes e iguais a μ.

A Condição de Kotecký-Preiss para o modelo dominó pode ser escrito como

$$\rho_\gamma \leq \mu(\gamma) e^{-\sum_{\tilde{\gamma} \not\sim \gamma} \mu(\tilde{\gamma})} \iff \varepsilon \leq \mu e^{-7\mu}$$

fornecendo

$$\varepsilon \leq \frac{1}{7e} \approx 0.0525.$$

Por outro lado, pela Condição de Dobrushin

$$\rho_\gamma \leq \frac{\mu(\gamma)}{\prod_{\tilde{\gamma} \not\sim \gamma} [1 + \mu(\tilde{\gamma})]} \iff \varepsilon \leq \frac{\mu}{(1+\mu)^7}$$

o que fornece

$$\varepsilon \leq \frac{\frac{1}{6}}{(1 + \frac{1}{6})^7} \approx 0.0566.$$

Finalmente, a Condição de Fernández-Procacci nos dá

$$\rho_\gamma \leq \frac{\mu(\gamma)}{\Xi^\gamma(\mu)} \iff \varepsilon \leq \frac{\mu}{1 + 7\mu + 9\mu^2},$$

donde obtemos

$$\varepsilon \leq \frac{1}{13} \approx 0.0769.$$

1.5.2 O gás de rede

Seja $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo infinito de grau limitado com conjunto de vértices $\mathbb{V}$, conjunto de elos $\mathbb{E}$ e grau máximo Δ. O sistema de polímeros obtido escolhendo $\mathcal{P} = \mathbb{V}$ e $\mathcal{G} = \mathbb{G}$ é chamado gás de rede do tipo caroço duro auto-repulsivo em $\mathbb{G}$. Neste caso, os polímeros são os vértices de $\mathbb{G}$

Dizemos que dois polímeros $\{x, y\} \subset \mathbb{V}$ são incompatíveis se ou $y = x$ (auto-repulsão) ou $\{x, y\} \in \mathbb{E}$ (interação de pares do tipo caroço duro). Vamos supor que a atividade de um polímero $x \in \mathcal{P}$ é constante, isto é, $\rho_x = \rho$ para todo $x \in \mathbb{V}$. É esperado que o raio de convergência dependa fortemente da estrutura topológica de G. Consideramos inicialmente o pior caso, ou seja, quando o grafo $\mathbb{G}$ é tal que os vizinhos mais próximos de qualquer vértice são dois a dois compatíveis. Isso acontece, por exemplo, se $\mathbb{G}$ é uma árvore ou se é uma rede cúbica $\mathbb{Z}^d$. A Condição de Kotecký-Preiss para este modelo conduz a

$$\rho_x \leq \mu(x) e^{-\sum_{y \not\sim x} \mu(y)} \iff \rho \leq \mu e^{-(\Delta+1)\mu},$$

o que fornece

$$\rho \leq \frac{1}{(\Delta + 1)e}.$$

Por outro lado, a Condição de Dobrushin nos dá

$$\rho \leq \frac{\mu(x)}{\prod_{y \not\sim x}[1 + \mu(y)]} \iff \rho \leq \frac{\mu}{(1+\mu)^{\Delta+1}},$$

fornecendo

$$\rho \leq \frac{\frac{1}{\Delta}}{(1 + \frac{1}{\Delta})^{\Delta+1}} = \frac{\Delta^{\Delta}}{(\Delta+1)^{\Delta+1}}.$$

Finalmente, pela Condição de Fernández-Procacci

$$\rho \leq \frac{\mu(x)}{\Xi^x(\mu)} \iff \rho \leq \frac{\mu}{1 + (\Delta+1)\mu + \sum_{k=2}^{\Delta} \binom{\Delta}{k} \mu^k} = \frac{\mu}{\mu + (1+\mu)^{\Delta}},$$

resultando

$$\rho \leq \frac{\frac{1}{\Delta - 1}}{\frac{1}{\Delta-1} + \left(1 + \frac{1}{\Delta-1}\right)^{\Delta}} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta^{\Delta}}{(\Delta-1)^{\Delta-1}}}.$$

A cota acima pode ser melhorada usando o fato de que, para qualquer grafo de grau limitado $\mathbb{G}$ com grau máximo Δ, o raio de convergência $\rho_{\mathbb{G}}$ do gás de rede com interações do tipo caroço duro em $\mathbb{G}$ é menor ou igual do que o raio de convergência $\rho_{\mathbb{T}_\Delta}$ do gás de rede com interações do tipo caroço duro na árvore regular $\mathbb{T}_\Delta$ com grau Δ. Isso ocorre devido à função (1.21) quando calculada para o gás de polímeros em que os polímeros são vértices do grafo de grau limitado $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ com grau máximo Δ ser menor ou igual do que quando calculada para o gás de polímeros cujos vértices estão na árvore regular $\mathbb{T}_\Delta$.

Neste caso, o raio $\rho_{\mathbb{T}_\Delta}$ pode ser calculado explicitamente [67, 69]:

$$\rho_{\mathbb{T}_\Delta} = \frac{(\Delta - 1)^{(\Delta-1)}}{\Delta^{\Delta}}. \tag{1.75}$$

O exemplo do gás de rede será estudado mais detalhamente no Capítulo 4 quando estudarmos a ligação entre a o gás de rede e o Método Probabilístico.

1.5.3 Gás de subconjuntos finitos de um conjunto enumerável

Consideremos um conjunto infinito enumerável $\mathbb{V}$.

Definimos o espaço de polímeros por $\mathcal{P}_{\mathbb{V}} = \{R \subset \mathbb{V} : |R| < \infty\}$ e a relação de incompatibilidade em $\mathcal{P}_{\mathbb{V}}$ da seguinte forma diremos que $\gamma \not\sim \gamma'$ se, e somente se, $\gamma \cap \gamma' \neq \emptyset$.

Note agora que os polímeros têm uma cardinalidade, de modo que podemos falar acerca de grandes polímeros e pequenos polímeros. Como antes, a cada polímero γ é associado uma atividade $\rho(\gamma)$. Assim, a atividade ρ é um elemento de $[0, \infty)$ com entradas $\rho(\gamma)$, $\gamma \in \mathcal{P}_{\mathbb{V}}$. Observe que aqui é permitido o valor $\rho(\gamma) = 0$ para algum γ de modo a ficar mais geral. Por exemplo, na expansão de polímeros para sistemas de spins a altas temperaturas, o espaço de polímeros é sempre $\mathcal{P}_{\mathbb{V}}$ para algum $\mathbb{V}$ adequado. No entanto, temos que $\rho(\gamma) = 0$ sempre que $|\gamma| = 1$. Chamamos esta particular e importante realização de gás de polímeros abstratos como *gás de subconjuntos finitos*.

Seja agora Λ um conjunto finito de $\mathbb{V}$. Uma configuração do gás de polímeros em Λ é dada uma vez especificado o conjunto de polímeros presentes em Λ. É claro, estes polímeros devem ser dois a dois compatíveis, isto é, uma configuração em Λ é uma coleção de subconjuntos disjuntos. A probabilidade de ver a configuração $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ na caixa Λ é definida por

$$\mathrm{Prob}_{\rho}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \Xi_{\Lambda}^{-1} \prod_{i=1}^{n} \rho(\gamma_i)$$

onde Ξ_{Λ} é uma função partição conforme:

$$\Xi_{\Lambda}(\rho) = 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}:\ \gamma_i \subset \Lambda \\ \gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset}} \rho(\gamma_1) \dots \rho(\gamma_n) \tag{1.76}$$

Vamos comparar três condições para esse modelo, começando com a Condição de Kotecký-Preiss. Escolha $\mu(\gamma) = \rho_{\gamma} e^{a|\gamma|}$. A condição (1.71) se torna a bem conhecida desigualdade:

$$\sum_{\substack{\tilde{\gamma} \in \mathcal{P} \\ \tilde{\gamma} \not\sim \gamma}} \rho_{\tilde{\gamma}}\, e^{a|\tilde{\gamma}|} \ \leq\ a|\gamma|, \quad \forall \gamma \in \mathcal{P}. \tag{1.77}$$

Agora, usando o fato de que $\tilde{\gamma} \not\sim \gamma$ significa $\tilde{\gamma} \cap \gamma \neq \emptyset$, temos

$$\sum_{\tilde{\gamma} \not\sim \gamma} \rho_{\tilde{\gamma}} e^{a|\tilde{\gamma}|} \leq |\gamma| \sup_{x \in \mathbb{V}} \sum_{\tilde{\gamma} \ni x} \rho_{\tilde{\gamma}} e^{a|\tilde{\gamma}|}. \tag{1.78}$$

Assim, (1.77) se torna

$$\sup_{x \in \mathbb{V}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \gamma \ni x}} |\rho_{\gamma}|\, e^{a|\gamma|} \ \leq\ a. \tag{1.79}$$

Por outro lado, a Condição de Dobrushin pode ser escrita como

$$\rho_\gamma \leq \frac{c(\gamma)}{\prod_{\tilde{\gamma}\in\mathcal{P}:\,\tilde{\gamma}\not\sim\gamma}[1+c(\tilde{\gamma})]}.$$

Escolhendo novamente $c(\gamma) = |\rho_\gamma|e^{a|\gamma|}$ a condição acima pode ser reescrita como:

$$\prod_{\substack{\tilde{\gamma}\in\mathcal{P}\\ \tilde{\gamma}\not\sim\gamma}} (1+|\rho_{\tilde{\gamma}}|e^{a|\tilde{\gamma}|}) \leq e^{a|\gamma|}, \quad \forall\gamma\in\mathcal{P},$$

ou seja,

$$\sum_{\substack{\tilde{\gamma}\in\mathcal{P}\\ \tilde{\gamma}\not\sim\gamma}} \log(1+|\rho_{\tilde{\gamma}}|e^{a|\tilde{\gamma}|}) \leq a|\gamma|, \quad \forall\gamma\in\mathcal{P}. \tag{1.80}$$

Assim,

$$\sup_{x\in\mathbb{V}} \sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}\\ \gamma\ni x}} \log(1+|\rho_\gamma|e^{a|\gamma|}) \leq a, \tag{1.81}$$

que é um pouco melhor do que (1.79).

Finalmente, a Condição de Fernández-Procacci torna-se

$$\Xi^{\gamma}_{\mathcal{P}}(c) \leq e^{a|\gamma|} \tag{1.82}$$

onde

$$\Xi^{\gamma}_{\mathcal{P}}(c) = 1 + \sum_{n=1}^{|\gamma|} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n\\ \gamma_i\not\sim\gamma,\gamma_i\sim\gamma_j}} \prod_{i=1}^{n} |\rho_{\gamma_i}|e^{a|\gamma_i|}.$$

Novamente usamos o fato de que $\gamma_i \not\sim \gamma_j \iff \gamma_i\cap\gamma_j \neq \emptyset$ e $\gamma_i \sim \gamma_j \iff \gamma_i\cap\gamma_j = \emptyset$ para estimar o fator

$$\sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n\\ \gamma_i\not\sim\gamma,\gamma_i\sim\gamma_j}} \prod_{i=1}^{n} |\rho_{\gamma_i}|e^{a|\gamma_i|}.$$

Note que este fator é zero quando $n > |\gamma|$, pois não tem como escolher n subconjuntos γ_i de $\mathbb{V}$ tais que todos sejam dois a dois compatíveis (ou seja, disjuntos) e todos incompatíveis com um subconjunto fixado γ de $\mathbb{V}$ com número de elementos igual a $|\gamma|$. Por outro lado, quando a soma acima não é zero, isto é, para $n \leq |\gamma|$, ela pode ser limitada por

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathcal{P}^n\\ \gamma_i\not\sim\gamma,\gamma_i\sim\gamma_j}} \prod_{i=1}^{n} \rho_{\gamma_i}e^{a|\gamma_i|} &\leq |\gamma|(|\gamma|-1)\cdots(|\gamma|-n+1)\left[\sup_{x\in\mathbb{V}} \sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}\\ x\in\gamma}} |\rho_\gamma|e^{a|\gamma|}\right]^n \\
&\leq \binom{|\gamma|}{n} n! \left[\sup_{x\in\mathbb{V}} \sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}\\ x\in\gamma}} |\rho_\gamma|e^{a|\gamma|}\right]^n.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\Xi_{\mathcal{P}}^{\gamma}(c) \le 1 + \sum_{n=1}^{|\gamma|} \binom{|\gamma|}{n} \left[\sup_{x\in\mathbb{V}} \sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P} \\ x\in\gamma}} |\rho_\gamma| e^{a|\gamma|} \right]^n = \left[1 + \sup_{x\in\mathbb{V}} \sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P} \\ x\in\gamma}} |\rho_\gamma| e^{a|\gamma|} \right]^{|\gamma|}. \tag{1.83}$$

Logo, (1.82) pode ser reescrita como

$$\left[1 + \sup_{x\in\mathbb{V}} \sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P} \\ x\in\gamma}} |\rho_\gamma| e^{a|\gamma|} \right]^{|\gamma|} \le e^{a|\gamma|}$$

isto é,

$$\sup_{x\in\mathbb{V}} \sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P} \\ x\in\gamma}} |\rho_\gamma| e^{a|\gamma|} \le e^a - 1. \tag{1.84}$$

Note que o polidisco obtido não é exatamente o do critério de Fernández-Procacci pois fazemos a estimativa (1.83). Lembramos que a condição (1.84) já havia sido obtida no início da década de 70 por Gruber e Kunz [43] utilizando o método das equações de Kirkwood-Salzburg e, desde então, havia sido pouco utilizada.

Tentar entender este fato, ou seja, como se deu a obtenção do mesmo critério de convergência de Fernández-Procacci através de uma técnica totalmente diferente, foi uma das questões que motivaram a elaboração desta tese.

Para este exemplo do gás de subconjuntos apresentaremos uma prova por indução deste critério, assim concluindo que as três abordagens: cotar os coeficientes de Ursell usando identidades do tipo grafo-árvore, o método indutivo e as equações de Kirkwood-Salzburg, são equivalentes, pelo menos neste contexto.

Capítulo 2

O Método das equações de Kirkwood-Salzburg

2.1 O Formalismo de Gruber-Kunz para o gás de subconjuntos

Consideremos novamente um conjunto infinito enumerável $\mathbb{V}$ e, no que segue, Λ sempre denotará um subconjunto finito de $\mathbb{V}$.

No célebre artigo de Gruber and Kunz [43], o sistema de polímeros $\mathcal{P}$ considerado é composto apenas por partições de Λ e a incompatibilidade é dada pela intersecção. Outra diferença é que não é considerada a contribuição do conjunto vazio, ou seja:

$$\Xi_\Lambda(\rho) = \sum_{n\geq 1} \sum_{\substack{\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}:\ \cup\gamma_i=\Lambda \\ |\gamma_i|\geq 1,\quad \gamma_i\cap\gamma_j=\emptyset}} \rho(\gamma_1)\ldots\rho(\gamma_n). \tag{2.1}$$

Nesse caso sempre podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Xi_\Lambda(\rho) &= \sum_{n\geq 1} \sum_{\substack{\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}:\ \cup\gamma_i=\Lambda \\ |\gamma_i|\geq 1,\quad \gamma_i\cap\gamma_j=\emptyset}} \rho(\gamma_1)\ldots\rho(\gamma_n) \\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\} \\ |\gamma_i|\geq 2,\quad \gamma_i\cap\gamma_j=\emptyset}} \rho(\gamma_1)\ldots\rho(\gamma_n) \prod_{x\in\Lambda\setminus\cup\gamma_i} \rho(\{x\}) \\
&= \prod_{x\in\Lambda} \rho(\{x\}) \left[1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{\substack{\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}:\ \cup\gamma_i=\Lambda \\ |\gamma_i|\geq 2,\quad \gamma_i\cap\gamma_j=\emptyset}} \tilde{\rho}(\gamma_1)\ldots\tilde{\rho}(\gamma_n)\right],
\end{aligned} \tag{2.2}$$

onde, para qualquer $\gamma \in \mathcal{P}$ tal que $|\gamma| \geq 2$,

$$\tilde{\rho}(\gamma) = \frac{\rho(\gamma)}{\prod_{x\in\gamma}\rho(\{x\})}.$$

Assim, o “gás de partições” de Gruber e Kunz é, neste sentido, equivalente ao gás de polímeros usual onde os polímeros têm cardinalidade maior do que 1.

Posto isso, sem perda de generalidade, podemos considerar o caso geral (1.76), ou seja, as configurações de polímeros $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ contribuindo para a função partição (1.76) não são necessariamente uma partição de Λ e, eventualmente, podem conter átomos, isto é, alguns dos γ_i podem ter cardinalidade $|\gamma_i| = 1$.

Definimos as *funções de correlação* deste gás, a volume finito Λ, por

$$\phi^{\rho}_{\Lambda}(\gamma_1, \dots, \gamma_p) = \frac{1}{\Xi_{\Lambda}(\rho)} \rho(\gamma_1) \dots \rho(\gamma_p) \left[1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{\{\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n\}:\ \tilde{\gamma}_i \subseteq \Lambda \setminus \cup_{i=1}^{p} \gamma_i \\ \tilde{\gamma}_i \cap \tilde{\gamma}_j = \emptyset}} \rho(\tilde{\gamma}_1) \dots \rho(\tilde{\gamma}_n) \right]. \tag{2.3}$$

As correlações então podem ser escritas como

$$\phi^{\rho}_{\Lambda}(\gamma_1, \dots, \gamma_p) = \rho(\gamma_1) \dots \rho(\gamma_p) \frac{\Xi_{\Lambda \setminus \cup_i \gamma_i}(\rho)}{\Xi_{\Lambda}(\rho)}.$$

de modo que, assim como Gruber e Kunz sugerem, consideramos as funções

$$\bar{\phi}^{\rho}_{\Lambda}(\gamma_1, \dots, \gamma_p) = \frac{\Xi_{\Lambda \setminus \cup_i \gamma_i}(\rho)}{\Xi_{\Lambda}(\rho)}. \tag{2.4}$$

Lembre que queremos determinar um polidisco $\{z_\gamma \in \mathbb{C}^{\mathcal{P}} : |z_\gamma| \leq \rho_\gamma\}$, o qual não dependente de Λ, onde as correlações são analíticas. Assim, se para cada conjunto finito de polímeros as funções 2.22 são analíticas, certamente as correlações o serão, assim, nos fixamos nestas últimas.

Note que esta função pode ser vista como uma função dos subconjuntos de Λ (em vez de uma função numa p-upla do conjunto de polímeros), isto é, se $X = \cup_i \gamma_i$,

$$\bar{\phi}^{\rho}_{\Lambda}(\gamma_1, \dots, \gamma_p) = \bar{\phi}^{\rho}_{\Lambda}(X) = \frac{\Xi_{\Lambda \setminus X}(\rho)}{\Xi_{\Lambda}(\rho)}. \tag{2.5}$$

Observe que $\bar{\phi}^{\rho}_{\Lambda}(\emptyset) = 1$ e ainda, note agora que para qualquer $Z \subset \mathbb{V}$ finito e para qualquer $x_1 \in \mathbb{V} \setminus Z$, podemos escrever

$$\Xi_{Z \cup \{x_1\}}(\rho) = \Xi_Z(\rho) + \sum_{S \subset Z} \rho(\{x_1\} \cup S) \Xi_{Z \setminus S}(\rho), \tag{2.6}$$

onde na soma sobre os subconjuntos $S \subset Z$, o subconjunto $\emptyset$ está incluso. A fórmula acima pode então ser reescrita como

$$\Xi_Z(\rho) = \Xi_{Z \cup \{x_1\}}(\rho) - \sum_{S \subset Z} \rho(\{x_1\} \cup S) \Xi_{Z \setminus S}(\rho). \tag{2.7}$$

Agora, seja $Z \cup \{x_1\} \subset \Lambda$ e faça $X = \Lambda \backslash Z$, de modo que $x_1 \in X$ e $Z = \Lambda \backslash X$. Então, (2.7) torna-se:

$$\Xi_{\Lambda \backslash X}(\rho) = \Xi_{\Lambda \backslash (X - x_1)}(\rho) \; - \sum_{S \subset \Lambda \backslash X} \rho(\{x_1\} \cup S) \Xi_{\Lambda \backslash (X \cup S)}(\rho) \tag{2.8}$$

ou, dividindo esta equação por Ξ_Λ e usando definição das funções $\bar{\phi}^\rho_\Lambda$ em 2.5, obtemos:

$$\bar{\phi}^\rho_\Lambda(X) = \bar{\phi}^\rho_\Lambda(X - x_1) \; - \sum_{S \subset \Lambda \backslash X} \rho(\{x_1\} \cup S) \bar{\phi}^\rho_\Lambda(X \cup S). \tag{2.9}$$

Definição 2.1. *Estas equações são as* **Equações de Kirkwood-Salzburg** *para este sistema de polímeros.*

Nestas equações, x_1 pode ser qualquer ponto em X, mas vamos considerar aqui x_1 como o menor vértice em alguma enumeração escolhida a priori em $\mathbb{V}$.

A dedução das equações de Kirkwood-Salzburg foi relativamente simples porém, o leitor que observar a prova no trabalho original de Gruber e Kunz [43] ficará surpreso com as complicadas identidades algébricas usadas pelos autores até que eles obtenham essas equações.

O ponto central desta demonstração, não percebido por ninguém na época de Gruber e Kunz, é que as equações de Kirkwood-Salzburg são conseqüência imediata da então chamada *Identidade Fundamental*, equação satisfeita pela função partição, equação (2.6) neste caso, veja [67] pág. 36.

Essa identidade tem papel fundamental na prova por indução do Critério de Dobrushin e isso foi um forte indício de que poderia existir uma prova indutiva para este critério de Gruber e Kunz (re-obtido por Fernández e Procacci anos mais tarde).

De fato, no capítulo seguinte usando justamente esta identidade, chegaremos neste critério para a convergência da pressão usando o método indutivo.

O restante da prova segue os passos de Gruber e Kunz, usuais no método de Kirkwood-Salzburg, ou seja, construímos um espaço de Banach e um operador a partir das equações de Kirkwood-Salzburg e, do controle da norma, obteremos a analiticidade desejada.

Seja $\xi > 1$ e considere o espaço de Banach $\mathcal{B}_\xi$ das funções complexas definidas em subconjuntos finitos não-vazios de $\mathbb{V}$ (isto é, em $\mathcal{P}_\mathbb{V}$) com a norma

$$\|f\|_\xi = \sup_{X \in \mathcal{P}_\mathbb{V}} \frac{|f(X)|}{\xi^{|X|}} = \sup_{\substack{X \subset \mathbb{V} \\ |X| < \infty}} \frac{|f(X)|}{\xi^{|X|}}.$$

Defina a função $\tilde{\phi}_\Lambda : \mathcal{P}_{\mathbb{V}} \to \mathbb{C}$ como

$$\tilde{\phi}^\rho_\Lambda(X) = \begin{cases} \bar{\phi}^\rho_\Lambda(X), & \text{se } X \subset \Lambda \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, para $\rho \in [0,\infty)^{\mathcal{P}}$, claramente $\tilde{\phi}^\rho_\Lambda \in \mathcal{B}_\xi$ pois $|\tilde{\phi}^\rho_\Lambda(X)| \leq 1$, isso porque, por definição, $\tilde{\phi}^\rho_\Lambda(X)$ é ou 0 ou a razão entre funções de partição onde o numerador possui menos parcelas e $(\rho \geq 0)$.

Definimos agora em $\mathcal{B}_\xi$ um operador linear K_ρ como segue:

$$(K_\rho f)(X) = \begin{cases} f(X - x_1) - \sum\limits_{\substack{S \in P^*(\mathbb{V}) \\ S \cap X = \emptyset}} \rho(\{x_1\} \cup S) f(X \cup S), & \text{se} \quad |X| \geq 2 \\ \\ - \sum\limits_{\substack{S \in P^*(\mathbb{V}) \\ S \cap \{x\} = \emptyset}} \rho(\{x\} \cup S) f(\{x\} \cup S), & \text{se} \quad X = \{x\} \end{cases} \tag{2.10}$$

onde $P^*(\mathbb{V}) = \mathcal{P}_{\mathbb{V}} \cup \{\emptyset\}$.

Afirmação: O operador K_ρ está bem definido em $\mathcal{B}_\xi$, ou seja, é realmente um operador $K_\rho : \mathcal{B}_\xi \to \mathcal{B}_\xi$ quando a atividade ρ satisfaz

$$\sup_{x \in \mathbb{V}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}_{\mathbb{V}} \\ \gamma \ni x}} \rho(\gamma) \xi^{|\gamma|} < \infty. \tag{2.11}$$

Prova: Pela Definição 2.10, para qualquer $X \in \mathcal{P}_{\mathbb{V}}$ e $f \in \mathcal{B}_\xi$,

$$\begin{aligned} |(K_\rho f)(X)| &\leq |f(X - x_1)| + \sum_{\substack{S \in P^*(\mathbb{V}) \\ S \cap X = \emptyset}} |\rho(\{x_1\} \cup S)||f(X \cup S)| \\ &\leq \xi^{|X|-1} \|f\|_\xi + \sum_{\substack{S \in P^*(\mathbb{V}) \\ S \cap X = \emptyset}} |\rho(\{x_1\} \cup S)| \xi^{|X|+|S|} \|f\|_\xi \\ &= \xi^{|X|} \, \|f\|_\xi \, \frac{1}{\xi} \left[1 + \sum_{\substack{S \in P^*(\mathbb{V}) \\ S \cap X = \emptyset}} |\rho(\{x_1\} \cup S)| \xi^{|S|+1} \right] \\ &\leq \xi^{|X|} \, \|f\|_\xi \, \frac{1}{\xi} \left[1 + \sup_{x \in \mathbb{V}} \sum_{\substack{S \in P^*(\mathbb{V}) \\ S \cap X = \emptyset}} |\rho(\{x\} \cup S)| \xi^{|S|+1} \right] \\ &= \xi^{|X|} \, \|f\|_\xi \, \frac{1}{\xi} \left[1 + \sup_{x \in \mathbb{V}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}_{\mathbb{V}} \\ x \in \gamma}} |\rho(\gamma)| \xi^{|\gamma|} \right]. \end{aligned}$$

então,

$$\|(K_\rho f)\|_\xi \leq \|f\|_\xi \, \frac{1}{\xi} \left[1 + \sup_{x \in \mathbb{V}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}_{\mathbb{V}} \\ x \in \gamma}} |\rho(\gamma)| \xi^{|\gamma|} \right].$$

Assim, K_ρ é um operador limitado em $\mathcal{B}_\xi$ e ainda

$$\|K_\rho\|_\xi \leq \frac{1}{\xi}\left[1 + \sup_{x\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}_\mathbb{V}\\ x\in\gamma}} |\rho(\gamma)|\xi^{|\gamma|}\right]. \tag{2.12}$$

$\square$

Agora a idéia é reescrever a equação (2.9) como uma equação no espaço de Banach $\mathcal{B}_\xi$ envolvendo o operador K_ρ. Consideremos a função característica

$$\chi_\Lambda(X) = \begin{cases} 1, & \text{se } X \subset \Lambda \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para volumes fixos Λ, o conjunto de equações (2.9) é válido para todo $\emptyset \neq X \subset \Lambda$. Podemos estender essas equações para todo $X \in \mathcal{P}_\mathbb{V}$ usando o operador χ_Λ fazendo simplesmente

$$\tilde{\phi}_\Lambda(X) = \chi_\Lambda(X)\tilde{\phi}_\Lambda(X - x_1) \ - \ \chi_\Lambda(X) \sum_{S\subset\Lambda\setminus X} \rho(\{x_1\}\cup S)\tilde{\phi}_\Lambda(X\cup S). \tag{2.13}$$

Observe agora que χ_Λ também pode ser vista como operador:

$$(\chi_\Lambda f)(X) = \chi_\Lambda(X)f(X), \ \text{ para todo } f \in \mathcal{B}_\xi$$

que é linear (e limitado) em $\mathcal{B}_\xi$. Também definimos o vetor $\alpha \in \mathcal{B}_\xi$ como

$$\alpha(X) = \begin{cases} 1, & \text{se } |X| = 1 \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, (2.13) se torna

$$\tilde{\phi}_\Lambda = \chi_\Lambda\alpha + \chi_\Lambda K_\rho\tilde{\phi}_\Lambda, \tag{2.14}$$

cuja única solução em $\mathcal{B}_\xi$ é

$$\tilde{\phi}_\Lambda = (1 - \chi_\Lambda K_\rho)^{-1} \ \chi_\Lambda\alpha,$$

desde que

$$\|\chi_\Lambda K_\rho\|_\xi < 1$$

que é claramente satisfeita se

$$\|K_\rho\|_\xi < 1. \tag{2.15}$$

Portanto, podemos concluir que, onde (2.15) é satisfeita, ϕ_Λ existe, é finita e analítica em ρ. Isso acontecerá, lembrando (2.12), quando a seguinte desigualdade for satisfeita

$$\frac{1}{\xi}\left[1+\sup_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}_{\mathbb{V}}\\ x\in\gamma}}|\rho(\gamma)|\xi^{|\gamma|}\right]<1. \tag{2.16}$$

Ou seja, seguindo a notação mais usual com $\xi=e^a$ ($a>0$), provamos o seguinte teorema nesta seção:

Teorema 2.1. *As funções de correlação (2.3) (a volume finito Λ qualquer) do gás de subconjuntos finitos de $\mathbb{V}$ são analíticas no polidisco $\{(z_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{P}}\in\mathbb{C}^{\mathcal{P}}:|z_\gamma|\le\rho_\gamma\}$ se existe $a>0$ tal que*

$$\sup_{x\in\mathbb{V}}\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}_{\mathbb{V}}\\ x\in\gamma}}|\rho(\gamma)|\ e^{a|\gamma|}<e^a-1. \tag{2.17}$$

Conforme dito antes, a simplificação da prova de Gruber e Kunz é devida à observação de que as equações de Kirkwood-Salzburg são conseqüência direta da identidade fundamental satisfeita pela função partição (2.6):

$$\Xi_{Z\cup\{x_1\}}(\rho)=\ \Xi_Z(\rho)\ +\ \sum_{S\subset Z}\rho(\{x_1\}\cup S)\Xi_{Z\setminus S}(\rho). \tag{2.18}$$

No contexto do gás de polímeros abstratos essa equação se escreve como:

$$\Xi_{Z\cup\{\gamma_0\}}(\rho)=\Xi_Z(\rho)+\rho(\gamma_0)\Xi_{Z\setminus\Gamma^*(\gamma_0)}(\rho), \tag{2.19}$$

onde Z é um subconjunto finito do conjunto de polímeros, $\gamma_0\notin Z$ e $\Gamma^*(\gamma_0)=\{\gamma\in Z:\gamma\not\sim\gamma_0\}$.

Assim, como esta identidade fundamental gera as equações de Kirkwood-Salzburg que determinam as correlações no caso do gás de subconjuntos, é natural que a sua correspondente no gás abstrato nos leve às correlações também, veremos isso na próxima seção.

A condição para a convergência no caso abstrato utilizando essa abordagem clássica das equações de Kirkwood-Salzburg nos levará a uma condição levemente pior do que a condição de Dobrushin, como veremos a seguir. No entanto, com uma modificação na abordagem, voltando a tentar controlar a série e não a norma do operador, obteremos de fato a condição de Dobrushin que será apresentada na Seção 2.3.

2.2 As equações de Kirkwood-Salzburg para o gás de polímeros abstratos

Nesta seção aplicaremos o método das equações de Kirkwood-Salzburg para o sistema de polímeros abstratos. Para aplicar este método primeiramente precisaremos definir as funções de correlação do sistema.

Definição 2.2. *Seja $U \subset \mathcal{P}$. Dizemos que U é compatível se $|U| = 1$, ou $|U| \geq 2$ e para qualquer par $\{\gamma, \gamma'\} \subset U$ temos $\gamma \sim \gamma'$. Do contrário, dizemos que $U \subset \mathcal{P}$ é incompatível.*

As funções de correlação representam a probabilidade de ver no sistema os polímeros $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

No volume finito Λ, se $U = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ é compatível, definimos a *função de correlação* por

$$\phi_\Lambda(\gamma_1, \ldots, \gamma_p) = \frac{1}{\Xi_\Lambda(\rho_\Lambda)} \rho(\gamma_1) \ldots \rho(\gamma_p) \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{\{\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n\} \subset \Lambda \\ \tilde{\gamma}_i \sim \gamma_i, \quad \tilde{\gamma}_i \sim \tilde{\gamma}_j}} \rho(\tilde{\gamma}_1) \ldots \rho(\tilde{\gamma}_n) \tag{2.20}$$

enquanto que, se $U = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ é incompatível, dizemos que $\phi_\Lambda(\gamma_1, \ldots, \gamma_p) = 0$. Isso é condizente com a convenção usual de que soma de zeros parcelas é zero.

Note que $\phi_\Lambda(\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ é a soma das probabilidades das configurações nas quais o conjunto $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$ está presente.

Notação 2.1. *Seja $U \subset \mathcal{P}$ e seja $\gamma \in \mathcal{P}$. Usaremos o símbolo $\gamma \not\sim U$ quando existe $\gamma' \in U$ tal que $\gamma \not\sim \gamma'$.*

Notação 2.2. *Denotamos $\Gamma(U) = \{\gamma \in \mathcal{P} : \gamma \not\sim U\}$ e $\Gamma^*_\Lambda(U) = \{\gamma \in \Lambda : \gamma \not\sim U \text{ e } \gamma \notin U\}$.*

Então observe que a correlação pode ser escrita como

$$\phi_\Lambda(\gamma_1, \ldots, \gamma_p) = \rho(\gamma_1) \ldots \rho(\gamma_p) \frac{\Xi_{\Lambda \setminus \Gamma(\cup_i \gamma_i)}}{\Xi_\Lambda} \tag{2.21}$$

Assim como Gruber e Kunz, para $X \subset \Lambda$ vamos considerar as funções

$$\bar{\phi}_\Lambda(X) = \frac{\Xi_{\Lambda \setminus X}}{\Xi_\Lambda}. \tag{2.22}$$

Este conjunto de funções é maior do que o conjunto de funções de correlação a volume finito quando X varia em Λ, pois existem muitos conjuntos $Y \subset \Lambda$ para os quais não há $U \subset \Lambda$ compatível tal que $\Gamma(Y) = U$.

Assim, as funções de correlação formam um subconjunto próprio deste conjunto de funções do tipo (2.22) acima. Dessa forma, se provarmos que para qualquer $X \subset \Lambda$ a função (2.22) é analítica em relação às atividades algum polidisco uniformemente no volume Λ, então o mesmo será verdade para as funções de correlação (2.20).

As equações de Kirkwood-Salzburg para as funções $\bar{\phi}_\Lambda(X)$ podem ser obtidas através da relação

$$\Xi_{Z \cup \{\gamma_0\}}(\rho) = \Xi_Z(\rho) + \rho(\gamma_0) \Xi_{Z \setminus \Gamma^*_Z(\gamma_0)}(\rho), \tag{2.23}$$

onde Z é um subconjunto finito do conjunto de polímeros, $\gamma_0 \notin Z$ e $\Gamma^*_Z(\gamma_0) = \{\gamma \in Z : \gamma \not\sim \gamma_0\}$.

Suponha que $Z \cup \{\gamma_0\} \subset \Lambda$ com $\gamma_0 \notin Z$. Dividindo a equação anterior por $\Xi_\Lambda(\rho)$ temos:

$$\frac{\Xi_{Z\cup\{\gamma_0\}}(\rho)}{\Xi_\Lambda(\rho)} = \frac{\Xi_Z(\rho)}{\Xi_\Lambda(\rho)} + \rho(\gamma_0)\frac{\Xi_{Z\backslash\Gamma^*_Z(\gamma_0)}(\rho)}{\Xi_\Lambda(\rho)}. \tag{2.24}$$

Assim, fazendo $Z = \Lambda\backslash X$ temos que $\gamma_0 \in X$ e, pela definição (2.22), a equação (2.24) se torna

$$\bar{\phi}_\Lambda(X\backslash\gamma_0) = \bar{\phi}_\Lambda(X) + \rho(\gamma_0)\bar{\phi}_\Lambda(X \cup \Gamma^*_\Lambda(\gamma_0)) \tag{2.25}$$

isto é,

$$\bar{\phi}_\Lambda(X) = \bar{\phi}_\Lambda(X\backslash\gamma_0) - \rho(\gamma_0)\bar{\phi}_\Lambda(X \cup \Gamma^*_\Lambda(\gamma_0)). \tag{2.26}$$

Note que $\gamma_0 \in X$, enquanto $\Gamma^*_\Lambda(\gamma_0) = \{\gamma \in \Lambda : \gamma \neq \gamma_0,\ \gamma \not\sim \gamma_0\} \subset \Lambda\backslash X$.

Lembrando a seção anterior, é natural denominarmos estas equações de *Equações de Kirkwood-Salzburg para o gás de polímeros abstratos*.

Seja $P_F(\mathcal{P})$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos de $\mathcal{P}$. Definimos o espaço de Banach $\mathbb{B}^\xi_\rho$ formado pelas funções $f : P_F(\mathcal{P}) \to \mathbb{C}$ com norma

$$\|f\|_\xi = \sup_{X \in P_F(\mathcal{P})} \frac{f(X)}{\prod_{\gamma\in X}\xi(\gamma)}, \tag{2.27}$$

onde $\xi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^+$ é uma função positiva que será escolhida adequadamente de modo que $\xi(\gamma) > 1$, para todo $\gamma \in \mathcal{P}$.

Considere o operador K^Λ_ρ em $\mathbb{B}^\xi_\rho$ definido por:

$$(K^\Lambda_\rho f)(X) = \begin{cases} f(X - \gamma_0) - \rho(\gamma_0) f(X \cup \Gamma^*_\Lambda(\gamma_0)) & \text{se} \quad |X| \geq 2 \\ \\ -\rho(\gamma_0) f(X \cup \Gamma^*_\Lambda(\gamma_0)) & \text{se} \quad X = \{\gamma_0\}, \end{cases}$$

onde γ_0 é o primeiro polímero em X onde escolhemos alguma enumeração $E : \mathbb{N} \to \mathcal{P} : n \mapsto \gamma_n$ do conjunto enumerável $\mathcal{P}$ de modo que em qualquer conjunto $X \subset \mathcal{P}$ podemos pegar um polímero γ_0 com o menor índice n da enumeração escolhida.

Vamos verificar que K^Λ_ρ é, de fato, um operador agindo em $\mathbb{B}^\xi_\rho$.

K_ρ^Λ é claramente linear. Além disso

$$\begin{aligned} |(K_\rho^\Lambda f)(X)| &= |f(X\backslash\gamma_0)| + |\rho(\gamma_0)||f(X\cup\Gamma_\Lambda^*(\gamma_0))| \\ &\leq \|f\|_\xi \prod_{\gamma\in X\backslash\gamma_0} \xi(\gamma) + |\rho(\gamma_0)|\|f\|_\xi \prod_{\gamma\in X}\xi(\gamma) \prod_{\gamma\in\Gamma_\Lambda^*(\gamma_0)} \xi(\gamma) \\ &\leq \prod_{\gamma\in X}\xi(\gamma)\|f\|_\xi \left[\frac{1}{\xi(\gamma_0)}\Big[1+|\rho(\gamma_0)| \prod_{\gamma\in\Gamma_\Lambda(\gamma_0)} \xi(\gamma)\Big]\right], \end{aligned}$$

onde $\Gamma_\Lambda(\gamma_0) = \Gamma_\Lambda^*(\gamma_0)\cup\{\gamma_0\} = \{\tilde\gamma\in\Lambda : \tilde\gamma \not\sim \gamma_0\}$.

Assim, temos que para qualquer $f\in\mathbb{B}_\rho^\xi$, qualquer $X\subset\mathcal{P}$ e $\gamma_0\in X$:

$$\frac{|(K_\rho^\Lambda f)(X)|}{\prod_{\gamma\in X}\xi(\gamma)} \leq \|f\|_\xi \left[\frac{1}{\xi(\gamma_0)}\Big[1+|\rho(\gamma_0)| \prod_{\gamma\in\Gamma(\gamma_0)} \xi(\gamma)\Big]\right],$$

pois $\prod_{\gamma\in\Gamma(\gamma_0)}\xi(\gamma) \geq \prod_{\gamma\in\Gamma_\Lambda(\gamma_0)}\xi(\gamma)$ e usando $\xi(\gamma) > 1,\ \forall\ \gamma\in\mathcal{P}$.

Portanto, para qualquer $f\in\mathbb{B}_\rho^\xi$:

$$\|(K_\rho^\Lambda f)\|_\xi \leq \|f\|_\xi \sup_{\gamma_0\in\mathcal{P}} \left[\frac{1}{\xi(\gamma_0)}\Big[1+|\rho(\gamma_0)| \prod_{\gamma\in\Gamma(\gamma_0)} \xi(\gamma)\Big]\right].$$

Portanto, K_ρ^Λ é um operador limitado em $\mathbb{B}_\rho^\xi$ com norma limitada por

$$\|K_\rho^\Lambda\|_\xi \leq \sup_{\gamma_0\in\mathcal{P}} \left[\frac{1}{\xi(\gamma_0)}\Big[1+|\rho(\gamma_0)| \prod_{\gamma\in\Gamma(\gamma_0)} \xi(\gamma)\Big]\right], \tag{2.28}$$

notando que a cota é uniforme no volume Λ.

De novo, a idéia é reescrever o conjunto de equações (2.26) como uma equação no espaço de Banach $\mathbb{B}_\rho^\xi$ envolvendo o operador K_ρ^Λ. Em vista disso, vamos estender a definição das funções $\bar\phi_\Lambda(X)$ para qualquer conjunto finito $X\subset\mathcal{P}$ (e não apenas para os conjuntos $X\subset\Lambda$).

Como antes, $\chi_\Lambda : \mathcal{P}\to\mathbb{R}$ é dada por:

$$\chi_\Lambda(X) = \begin{cases} 1, & \text{se } X\subset\Lambda \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A extensão de $\bar\phi_\Lambda$ para qualquer conjunto é dada por $\tilde\phi_\Lambda(X) = \chi_\Lambda(X)\bar\phi_\Lambda(X)$.

Novamente a função χ_Λ define um operador linear e limitado no espaço de Banach:

$$(\chi_\Lambda f)(X) = \chi_\Lambda(X) f(X), \quad \forall\ f\in\mathbb{B}_\rho^\xi.$$

E então, podemos escrever as equações (2.26), para todo $X \subset P_F(\mathcal{P})$ conforme:

$$\tilde{\phi}_\Lambda(X) = \chi_\Lambda(X)\tilde{\phi}_\Lambda(X\backslash\{\gamma_0\}) \; - \; \chi_\Lambda(X)\rho(\gamma_0)\tilde{\phi}_\Lambda(X \cup \Gamma^*_\Lambda(\gamma_0)). \tag{2.29}$$

Se a função $\alpha \in \mathbb{B}^\xi_\rho$ então, como antes, temos:

$$\alpha(X) = \begin{cases} 1, & \text{se } |X| = 1 \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, (2.29) se torna

$$\tilde{\phi}_\Lambda = \chi_\Lambda\alpha + \chi_\Lambda K^\Lambda_\rho \tilde{\phi}_\Lambda, \tag{2.30}$$

cuja única solução em $\mathbb{B}^\xi_\rho$ é

$$\tilde{\phi}_\Lambda = (1 - \chi_\Lambda K^\Lambda_\rho)^{-1}(\;\chi_\Lambda\alpha), \tag{2.31}$$

desde que $\|\chi_\Lambda K^\Lambda_\rho\|_\xi < 1$, que é garantido quando $\|K^\Lambda_\rho\|_\xi < 1$.

Ou seja, provamos o seguinte teorema:

Teorema 2.2. *Dada $\rho > 0$, se existe $\xi(\gamma) > 1$, para todo γ tal que*

$$\sup_{\gamma_0 \in \mathcal{P}} \left[\frac{1}{\xi(\gamma_0)} \Big[1 + |\rho(\gamma_0)| \prod_{\gamma \in \Gamma(\gamma_0)} \xi(\gamma) \Big] \right] < 1 \tag{2.32}$$

então, por (2.28), $\|K^\Lambda_\rho\|_\xi < 1$, onde Λ é um conjunto finito qualquer, e as funções de correlação (2.20) do gás de polímeros abstratos são analíticas no polidisco $\{(z_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{P}} \in \mathbb{C}^{\mathcal{P}} : |z_\gamma| \le \rho_\gamma\}$.

Note que, a menos do supremo, esta é a Condição de Dobrushin. De fato, basta tomar $\xi(\gamma) = e^{\mu(\gamma)}$, $\mu > 0$ em (3.1) e observar que:

$$\frac{1}{\xi(\gamma_0)} \Big[1 + |\rho(\gamma_0)| \prod_{\gamma \in \Gamma(\gamma_0)} \xi(\gamma) \Big] < 1 \Leftrightarrow |\rho(\gamma_0)| \prod_{\gamma \in \Gamma(\gamma_0)} \xi(\gamma) < \xi(\gamma_0) - 1. \tag{2.33}$$

Aqui, mais uma vez, o método de controlar diretamente a série formal de interesse se mostrará superior aos demais, mesmo nesta abordagem das equações de Kirkwood-Salzburg.

De fato, na sessão seguinte não vamos usar um operador num espaço de Banach, controlaremos diretamente a série formal gerada pelas equações de Kirkwood-Salzburg que correspondem às correlações e provaremos que é suficiente o Critério de Dobrushin, sem a necessidade do supremo da condição (2.32).

2.3 A prova do Critério de Dobrushin usando as equações de Kirkwood-Salzburg

.

A maneira de escapar desta hipótese mais restritiva que precisamos exigir na sessão anterior é utilizar uma filosofia mais próxima à de Fernández-Procacci do que a de Gruber-Kunz na abordagem do problema. Ou seja, tentar controlar a série formal que é produzida a partir das equações de Kirkwood-Salzburg que as correlações satisfazem e não a norma do operador.

Como já vimos, as correlações de um gás de polímeros abstratos com atividades $\{z_\gamma\}_{\gamma\in\mathcal{P}}$ serão analíticas no polidisco $\{\{z_\gamma\}_{\gamma\in\mathcal{P}} \in \mathbb{C}^{\mathcal{P}} : |z_\gamma| \le \rho_\gamma\}$ onde $\rho_\gamma > 0, \forall\, \gamma \in \mathcal{P}$, se conseguirmos provar que a seguinte série formal é convergente:

$$\overline{\phi}_\Lambda \;=\; (1-\chi_\Lambda K_\rho^\Lambda)^{-1}(\chi_\Lambda\alpha) = \chi_\Lambda \sum_{n\ge 0}(K_\rho^\Lambda)^n(\,\chi_\Lambda\alpha). \tag{2.34}$$

Lembrando a definição de $K_\rho^\Lambda : \mathbb{C}^{F(\mathcal{P})} \to \mathbb{C}^{F(\mathcal{P})}$

$$K_\rho^\Lambda f(X) = \begin{cases} -\chi_\Lambda(X)\rho_{\gamma_0} f(X\cup\Gamma_\Lambda(\gamma_0)), & \text{se } |X| = 1 (X = \{\gamma_0\}) \\ \chi_\Lambda(X) f(X-\gamma_0) - \chi_\Lambda(X)\rho_{\gamma_0} f(X\cup\Gamma_\Lambda(\gamma_0)), & \text{se } 2 \le |X|, \end{cases} \tag{2.35}$$

onde $F(\mathcal{P})$ denota a coleção de todos os subconjuntos finitos de $\mathcal{P}$, γ_0 é o primeiro elemento de X segundo alguma ordem fixada de início e

$$\alpha(X) = \begin{cases} 1, & \text{se } |X| = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como estamos supondo $\rho > 0$, ou seja, $\rho_\gamma > 0\;\forall\,\gamma \in \mathcal{P}$, temos que $K_{-\rho}^\Lambda$ leva funções positivas em funções positivas, ou seja, $K_{-\rho}^\Lambda : [0,+\infty]^{F(\mathcal{P})} \to [0,+\infty]^{F(\mathcal{P})}$ é definida por

$$K_{-\rho}^\Lambda f(X) = \begin{cases} \chi_\Lambda(X)\rho_{\gamma_0} f(X\cup\Gamma_\Lambda(\gamma_0)), & \text{se } |X| = 1 \ (X = \{\gamma_0\}) \\ \chi_\Lambda(X) f(X-\gamma_0) + \chi_\Lambda(X)\rho_{\gamma_0} f(X\cup\Gamma_\Lambda(\gamma_0)), & \text{se } 2 \le |X|, \end{cases} \tag{2.36}$$

donde segue facilmente que

$$\overline{\phi}_\Lambda \;=\; (1-\chi_\Lambda K_\rho^\Lambda)^{-1}(\chi_\Lambda\alpha) = \chi_\Lambda \sum_{n\ge 0}(K_\rho^\Lambda)^n(\,\chi_\Lambda\alpha) \le \sum_{n\ge 0}(K_{-\rho}^\Lambda)^n(\alpha). \tag{2.37}$$

Assim, basta provar que a Condição de Dobrushin para a atividade ρ nos garante que a série

$$\sum_{n\ge 0}(K_{-\rho}^\Lambda)^n(\alpha) \tag{2.38}$$

é convergente, uniformemente em Λ.

Sabemos que a Condição de Dobrushin pode ser enunciada da seguinte forma:

Existe $\xi \in (1,+\infty)^{F(\mathcal{P})}$ tal que para todo $\gamma_0 \in \mathcal{P}$, vale a desigualdade:

$$1 + \rho_{\gamma_0} \prod_{\gamma\in\Gamma(\gamma_0)} \xi_\gamma \;\le\; \xi_{\gamma_0}\ , \tag{2.39}$$

Podemos estender ξ de maneira natural para uma função que denotaremos pela mesma letra $\xi \in [0,+\infty]^{F(\mathcal{P})}$ definida por $\xi(X) = \prod_{\gamma\in X} \xi_\gamma$.

É importante ressaltar que ξ assume somente valores finitos. A prova de que (2.38) é convergente seguirá da Condição de Dobrushin.

Na próxima proposição, como queremos controlar uma cotar superior, podemos desprezar as funções características e assim trabalhar com o operador:

$$K^\Lambda_\rho f(X) = \begin{cases} -\rho_{\gamma_0} f(X \cup \Gamma_\Lambda(\gamma_0)), & \text{se } |X| = 1 \ (X = \{\gamma_0\}) \\ f(X-\gamma_0) - \rho_{\gamma_0} f(X\cup\Gamma_\Lambda(\gamma_0)), & \text{se } 2 \le |X|. \end{cases}$$

Proposição 2.1. *Seja $\Phi^\Lambda_\rho : [0,+\infty]^{F(\mathcal{P})} \to [0,+\infty]^{F(\mathcal{P})}$ a função definida por:*

$$\Phi^\Lambda_\rho(f) = \alpha + K^\Lambda_{-\rho}(f),$$

onde ρ e ξ satisfazem a Condição de Dobrushin (2.39).

Então:

(i) $\sum_{n\ge 0}(K^\Lambda_{-\rho})^n(\alpha)$ é finita e é o ponto fixo mínimo de Φ^Λ_ρ.

(ii) $|\overline{\phi}_\Lambda(\rho)(X)| \le \sum_{n\ge0}(K^\Lambda_{-\rho})^n(\alpha)(X) \le \xi(X)$ para qualquer $X \in F(\mathcal{P})$. Como ξ não depende de Λ, a cota é uniforme em Λ.

Prova: Aqui usaremos resultados sobre reticulados que são discutidos em detalhe no Apêndice B. Se $f \le g$, então $\Phi^\Lambda_\rho(f) \le \Phi^\Lambda_\rho(g)$, ou seja, Φ^Λ_ρ é monótona e ainda, como $[0,+\infty]^{F(\mathcal{P})}$ é um reticulado completo, pelo Teorema de Knaster-Tarski, sabemos que Φ^Λ_ρ possui um ponto fixo.

A existência do ponto fixo não surpreende, pois de imediato percebemos que a função constante $f \equiv +\infty$ é ponto fixo de Φ^Λ_ρ, mas a Condição de Dobrushin nos garantirá a existência de outro ponto fixo que será finito.

Como $\sum_{n\ge0}(K^\Lambda_{-\rho})^n(\alpha)(X)$ é uma soma de termos positivos para qualquer $X \in F(\mathcal{P})$, segue que $\sum_{n\geq 0}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha) = \sup_N \sum_{n=0}^{N}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha)$ e então:

$$\begin{aligned}
\Phi^{\Lambda}_{\rho}\left[\sum_{n\geq 0}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha)\right] &= \Phi^{\Lambda}_{\rho}\left[\sup_N \sum_{n=0}^{N}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha)\right] = \alpha + K^{\Lambda}_{-\rho}\left[\sup_N \sum_{n=0}^{N}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha)\right] \\
&= \alpha + \sup_N K^{\Lambda}_{-\rho}\left[\sum_{n=0}^{N}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha)\right] = \alpha + \sup_N \left[\sum_{n=1}^{N+1}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha)\right] \\
&= \sum_{n\geq 0}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha).
\end{aligned}$$

É importante ressaltar que este ponto fixo é construindo de maneira iterativa a partir do menor elemento do reticulado, ou seja, a função nula. De fato,

$$(\Phi^{\Lambda}_{\rho})^N(0) = \sum_{n=0}^{N-1}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha),$$

ou seja, $(\Phi^{\Lambda}_{\rho})^N(0)$ é uma seqüência crescente e

$$\lim_N(\Phi^{\Lambda}_{\rho})^N(0) = \sup_N(\Phi^{\Lambda}_{\rho})^N(0) = \sum_{n\geq 0}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha).$$

Assim, tal como no teorema de Tarski-Kantorovitch, é fácil ver que $\sum_{n\geq 0}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha)$ é o ponto fixo mínimo Ψ de Φ^{Λ}_{ρ}. De fato, como $0 \leq \Psi$, então $0 \leq \Phi^{\Lambda}_{\rho}(0) \leq (\Phi^{\Lambda}_{\rho})^2(0) \leq ... \leq (\Phi^{\Lambda}_{\rho})^N(0) \leq \Psi$.

Disto segue que $\lim_N(\Phi^{\Lambda}_{\rho})^N(0) = \sum_{n\geq 0}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha) \leq \Psi$ e, por outro lado, como já sabemos que $\sum_{n\geq 0}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha)$ é ponto fixo e que Ψ é o ponto fixo mínimo, concluímos que $\sum_{n\geq 0}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha) = \Psi$.

Para terminar a prova de (i), basta provar que $\sum_{n\geq 0}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha) = \Psi$ é de fato finito e isso segue do item (ii) que provaremos agora. Observemos que a Condição de Dobrushin implica que:

$$\Phi^{\Lambda}_{\rho}(\xi)(X) \;\leq\; \xi(X)\ , \quad \forall\ X \in F(\mathcal{P})\ , \tag{2.40}$$

ou seja, $\Phi^{\Lambda}_{\rho}(\xi) \;\leq\; \xi$. Como ξ é finita e, lembrando que pelo Teorema de Knaster-Tarski o ponto fixo mínimo é o menor ponto g do reticulado $[0, +\infty]^{F(\mathcal{P})}$ tal que $\Phi^{\Lambda}_{\rho}(g) \;\leq\; g$ e também como já provamos que $\sum_{n\geq 0}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha)$ é ponto fixo, segue então que $\sum_{n\geq 0}(K^{\Lambda}_{-\rho})^n(\alpha)(X) \leq \xi(X)$, para qualquer que seja $X \in F(\mathcal{P})$. Resta apenas provar a desigualdade (2.40).

Seja X tal que $|X| \geq 2$, então:

$$\begin{aligned}
\Phi_\rho^\Lambda(\xi)(X) &= \big(\alpha + K_{-\rho}^\Lambda\, \xi\big)(X) = \xi(X-\gamma_0) + \rho_{\gamma_0}\, \xi\big(X \cup \Gamma_\Lambda(\gamma_0)\big) \\
&\leq \xi(X-\gamma_0) + \rho_{\gamma_0}\, \xi\big(X-\gamma_0)\xi\big(\Gamma_\Lambda(\gamma_0)\big) \\
&= \xi(X-\gamma_0)\Big[1 + \rho_{\gamma_0}\, \xi\big(\Gamma_\Lambda(\gamma_0)\big)\Big] \\
&= \xi(X-\gamma_0)[1 + \rho_{\gamma_0} \prod_{\gamma \in \Gamma_\Lambda(\gamma_0)} \xi_\gamma] \\
&\leq \xi(X-\gamma_0)\xi_{\gamma_0} = \xi(X).
\end{aligned}$$

A primeira desigualdade é assegurada pelo fato de $\xi_\gamma \geq 1$ para todo γ, pois disto segue que $\xi(X \cup Y) \leq \xi(X)\xi(Y)$ para quaisquer X e Y em $F(\mathcal{P})$. A segunda desigualdade segue da Condição de Dobrushin. O caso em que $|X| = 1$ é análogo. $\square$

Observação: É possível provar o item (ii) sem apelar para a caracterização do ponto fixo mínimo de Knaster-Tarski. Para provar a desigualdade (2.40) só precisamos da Condição de Dobrushin e, iterando esta desigualdade e usando a monotonicidade da função Φ_ρ^Λ, obtemos que para todo $N \geq 1$:

$$\sum_{n=0}^{N} (K_{-\rho}^\Lambda)^n(\ \alpha) + (K_{-\rho}^\Lambda)^{N+1}\ \xi \ \leq \ \sum_{n=0}^{N-1} (K_{-\rho}^\Lambda)^n(\ \alpha) + (K_{-\rho}^\Lambda)^{N}\ \xi \ \leq \ \xi \tag{2.41}$$

e então

$$\sum_{n \geq 0} (K_{-\rho}^\Lambda)^n(\alpha) \ \leq \ \xi\ . \tag{2.42}$$

O fato de ξ ser finita e de usarmos uma desigualdade do tipo $\Phi_\rho^\Lambda(\xi) \leq \xi$ são os mesmos princípios usados por Fernández e Procacci em [32] e por Faris em [30]. Assim como nestes trabalhos, temos interesse no ponto fixo que é uma série gerada de maneira iterativa cuja finitude é garantida por esta desigualdade. O ponto fixo acaba se mostrando finito e, como conseqüência, a série de interesse também.

Capítulo 3

O Método indutivo

Neste capítulo apresentaremos várias demonstrações, todas por indução, dos critérios de convergência para a expansão do gás de polímeros abstratos e do Critério de Fernández-Procacci para a convergência da expansão do gás de subconjuntos finitos da rede.

Note que já vimos nos capítulos anteriores que o Critério de Dobrushin pode ser obtido usando duas técnicas diferentes: cotando diretamente os termos da série usando identidades do tipo grafo-árvore como fizeram Fernández e Procacci [32] ou usando as equações de Kirkwood-Salzburg como vimos no capítulo anterior.

Cabe ressaltar que será respondida uma questão que intrigava especialistas da área referente ao gás de subconjuntos da rede. Depois de Fernández e Procacci [32] terem obtido para o gás de polímeros abstratos, através do controle da série, o mesmo critério que Gruber e Kunz [43] obtiveram para o gás de subconjuntos da rede usando as equações de Kirkwood-Salzburg, naturalmente surge a pergunta se é possível obter a mesma cota através da indução.

Apresentaremos esta prova por indução no final deste capítulo respondendo a pergunta.

3.1 Critério de Dobrushin

A Prova a seguir utiliza a abordagem de Miracle-Solé [52].

Em todas as provas por indução deste capítulo supomos $\rho(\gamma) > 0$ para todo polímero, e garantiremos a analiticidade no polidisco $\{|z_\gamma| \leq \rho(\gamma)\}$.

Teorema 3.1. *Seja $\mathcal{P}$ um conjunto de polímeros com a relação de incompatibilidade $\not\sim$. Supon-*

hamos que exista uma função positiva $\tilde{\mu}(\gamma)$, $\gamma \in \mathcal{P}$, tal que, para todo $\gamma_0 \in \mathcal{P}$

$$\rho(\gamma_0) \leq (e^{\tilde{\mu}(\gamma_0)} - 1) \exp\{-\sum_{\gamma \not\sim \gamma_0} \tilde{\mu}(\gamma)\}. \tag{3.1}$$

Então, para qualquer $\gamma_0 \in \mathcal{P}$, temos

$$|\Sigma_{\gamma_0}|(\rho) \leq \tilde{\mu}(\gamma_0) \tag{3.2}$$

e

$$\rho(\gamma_0)|\Pi_{\gamma_0}|(\rho) \leq e^{\tilde{\mu}(\gamma_0)} - 1, \tag{3.3}$$

onde $|\Sigma_{\gamma_0}|(\rho)$ é a série definida em (1.5) e $\Pi_{\gamma_0}(\rho)$ é a série definida em (1.9).

Conforme observado nas seções anteriores, esta formulação é equivalente à Proposição 1.1 através de mudança da variáveis

$$\mu(\gamma) = e^{\tilde{\mu}(\gamma_0)} - 1.$$

Prova: A prova será feita por indução em $|\Lambda|$. Assuma que para um dado Λ (e qualquer um de seus subconjuntos) a seguinte estimativa é satisfeita, para qualquer $\gamma \in \Lambda$,

$$|\Sigma_\gamma|(\rho_\Lambda) \leq \tilde{\mu}(\gamma), \tag{3.4}$$

onde $|\Sigma_\gamma|(\rho_\Lambda)$ é a versão a volume finito da série $|\Sigma_\gamma|(\rho)$. Já vimos várias vezes que Σ_γ pode ser escrita como diferença de logaritmos, donde

$$-\log \Xi_\Lambda(-\rho_\Lambda) + \log \Xi_{\Lambda\setminus\gamma_0}(-\rho_{\Lambda\setminus\gamma}) \leq \tilde{\mu}(\gamma)$$

e também, para todo $\Lambda' \subset \Lambda$,

$$-\log \Xi_\Lambda(-\rho_\Lambda) + \log \Xi_{\Lambda'}(-\rho_{\Lambda'}) \leq \sum_{\gamma \in \Lambda\setminus\Lambda'} \tilde{\mu}(\gamma). \tag{3.5}$$

Considere agora $\gamma_0 \in \mathcal{P}\setminus\Lambda$, assim:

$$\Xi_{\Lambda\cup\gamma_0}(\rho_{\Lambda\cup\gamma_0}) = \Xi_\Lambda(\rho_\Lambda) + \rho(\gamma_0)\Xi_{\Lambda\setminus\Gamma^*(\gamma_0)}(\rho_{\Lambda\setminus\Gamma^*(\gamma_0)})$$

e então,

$$\Xi_{\Lambda\cup\gamma_0}(-\rho_{\Lambda\cup\gamma_0}) = \Xi_\Lambda(-\rho_\Lambda) - \rho(\gamma_0)\Xi_{\Lambda\setminus\Gamma^*(\gamma_0)}(-\rho_{\Lambda\setminus\Gamma^*(\gamma_0)}) \tag{3.6}$$

onde $\Gamma^*(\gamma_0) = \{\gamma \in \Lambda : \gamma \not\sim \gamma_0\}$. Por (3.5)

$$-\log \Xi_\Lambda(-\rho_\Lambda) + \log \Xi_{\Lambda\setminus\Gamma^*(\gamma_0)}(-\rho_{\Lambda\setminus\Gamma^*(\gamma_0)}) \leq \sum_{\gamma \in \Gamma^*(\gamma_0)} \tilde{\mu}(\gamma).$$

Observe que, como $\Gamma^*(\gamma_0) \subset \Lambda$ e $\gamma_0 \notin \Lambda$, temos

$$\sum_{\gamma \in \Gamma^*(\gamma_0)} \tilde{\mu}(\gamma) \leq -\tilde{\mu}(\gamma_0) + \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \gamma \not\sim \gamma_0}} \tilde{\mu}(\gamma)$$

e também

$$-\log \Xi_\Lambda(-\rho_\Lambda) + \log \Xi_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)}(-\rho_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)}) = \log \left[\frac{\Xi_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)}(-\rho_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)})}{\Xi_\Lambda(-\rho_\Lambda)} \right].$$

Logo,

$$\frac{\Xi_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)}(-\rho_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)})}{\Xi_\Lambda(-\rho_\Lambda)} \leq \exp\Big\{ -\tilde{\mu}(\gamma_0) + \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \gamma \not\sim \gamma_0}} \tilde{\mu}(\gamma) \Big\} \tag{3.7}$$

e, pela hipótese (3.1),

$$\begin{aligned} \rho(\gamma_0) \frac{\Xi_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)}(-\rho_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)})}{\Xi_\Lambda(-\rho_\Lambda)} &\leq \rho(\gamma_0) \exp\Big\{ -\tilde{\mu}(\gamma_0) + \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \gamma \not\sim \gamma_0}} \tilde{\mu}(\gamma) \Big\} \\ &\leq (e^{\tilde{\mu}(\gamma_0)} - 1) e^{-\tilde{\mu}(\gamma_0)} = 1 - e^{-\tilde{\mu}(\gamma_0)}. \end{aligned}$$

Assim, usando o fato de que $-\ln(1-x)$ é uma função de x crescente para $x \in (-1, 1)$,

$$\begin{aligned} |\Sigma_{\gamma_0}|(\rho_{\Lambda \cup \gamma_0}) &= -\log \Xi_{\Lambda \cup \gamma_0}(-\rho_{\Lambda \cup \gamma_0}) + \log \Xi_\Lambda(-\rho_\Lambda) \\ &= -\log \left[\frac{\Xi_{\Lambda \cup \gamma_0}(-\rho_{\Lambda \cup \gamma_0})}{\Xi_\Lambda(-\rho_\Lambda)} \right] \\ &= -\log \left[1 - \rho(\gamma_0) \frac{\Xi_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)}(-\rho_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)})}{\Xi_\Lambda(-\rho_\Lambda)} \right] \\ &\leq -\log \left[1 - (1 - e^{-\tilde{\mu}(\gamma_0)}) \right] = \tilde{\mu}(\gamma_0). \end{aligned}$$

Isso prova a afirmação (3.4) para $\Lambda \cup \gamma_0$, e logo, para todo Λ finito em $\mathcal{P}$.

Para provar a cota (3.3) apenas observe que, para Λ tal que $\gamma_0 \in \Lambda$, temos

$$\rho(\gamma_0) |\Pi_{\gamma_0}|(\rho_\Lambda) = \rho(\gamma_0) \frac{\partial}{\partial z_{\gamma_0}} \log \Xi_\Lambda(z_\Lambda)|_{z_\Lambda = -\rho_\Lambda} = \rho(\gamma_0) \frac{\Xi_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)}(-\rho_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)})}{\Xi_\Lambda(-\rho_\Lambda)}.$$

Agora podemos usar (3.7) levando em conta que $\gamma_0 \in \Lambda$. Então,

$$\frac{\Xi_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)}(-\rho_{\Lambda \setminus \Gamma^*(\gamma_0)})}{\Xi_\Lambda(-\rho_\Lambda)} \leq \exp\Big\{ + \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P} \\ \gamma \not\sim \gamma_0}} \tilde{\mu}(\gamma) \Big\} \tag{3.8}$$

Finalmente, usando (3.8) e a hipótese (3.1), obtemos (3.3). □

A seguir, veremos a versão de Sokal para a prova do Critério de Dobrushin [67].

Teorema 3.2. *Seja $\mathcal{P}$ um conjunto de polímeros com relação de incompatibilidade $\not\sim$. Suponhamos que uma seqüência de números positivos r_γ é dada e, suponhamos a existência de constantes k_γ, $\gamma \in \mathcal{P}$ tais que $0 \le k_\gamma < 1/r_\gamma$ e, para todo $\gamma \in \mathcal{P}$,*

$$k_\gamma \ge \prod_{\substack{\tilde{\gamma} \neq \gamma \\ \tilde{\gamma} \not\sim \gamma}} \frac{1}{1 - k_{\tilde{\gamma}} r_{\tilde{\gamma}}} \tag{3.9}$$

Então, para qualquer $\Lambda \subset \mathcal{P}$ finito, a função partição $\Xi_\Lambda(z)$ não se anula no polidisco

$$\bar{D}_r = \{z \in \mathbb{C}^{\mathcal{P}} : |z_\gamma| \le r_\gamma \ \ \forall \gamma \in \mathcal{P}\}$$

satisfazendo

$$\left| \frac{\partial \log \Xi_\Lambda(z)}{\partial z_\gamma} \right| \le \frac{k_\gamma}{1 - k_\gamma |z_\gamma|}, \tag{3.10}$$

onde $\gamma \in \Lambda$, do contrário, $\partial \log \Xi_\Lambda(z)/\partial z_\gamma = 0$. Além disso, se z e $\tilde{z}$ pertencem a $\bar{D}_r$ e $\tilde{z}_\gamma/z_\gamma \in [0, \infty)$ para cada $\gamma \in \mathcal{P}$, então

$$\left| \log \frac{\Xi_\Lambda(\tilde{z})}{\Xi_\Lambda(z)} \right| \le \sum_{\gamma \in \Lambda} \left| \log \frac{1 - k_\gamma |\tilde{z}_\gamma|}{1 - k_\gamma |z_\gamma|} \right|. \tag{3.11}$$

Observação. Primeiramente, observamos que (3.10) implica (3.11) por integração. De fato, suponhamos que z and $\tilde{z}$ diferem apenas em um ponto $\gamma_0 \in \Lambda$, isto é, $\tilde{z}_{\tilde{\gamma}} = z_{\tilde{\gamma}}$ para todo $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ e $\tilde{z}_\gamma \neq z_\gamma$ com $\tilde{z}_\gamma / z_\gamma \ge 0$. Definamos agora a função z_α tal que

$$z_\alpha(\gamma) \ = \ \begin{cases} z_{\tilde{\gamma}} & \text{se } \tilde{\gamma} \neq \gamma \\ \alpha z_{\tilde{\gamma}} & \text{se } \tilde{\gamma} = \gamma \end{cases} \tag{3.12}$$

Então, para $\tilde{z}, z$ tais que $\tilde{z}_{\tilde{\gamma}} = z_{\tilde{\gamma}}$ para todo $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ e $\tilde{z}_\gamma \neq z_\gamma$ com $\tilde{z}_\gamma / z_\gamma \ge 0$.

$$\begin{aligned}
\left| \log \frac{\Xi_\Lambda(\tilde{z})}{\Xi_\Lambda(z)} \right| &= |\log \Xi_\Lambda(\tilde{z}) - \log \Xi_\Lambda(z)| \\
&= \left| \int_1^{\tilde{z}_\gamma / z_\gamma} \frac{d}{d\alpha} \log \Xi_\Lambda(z_\alpha) d\alpha \right| = \left| \int_1^{\tilde{z}_\gamma / z_\gamma} z_\gamma \frac{\partial}{\partial z_\gamma} \log \Xi_\Lambda(z_\alpha) d\alpha \right| \\
&\le |z_\gamma| \left| \int_1^{\tilde{z}_\gamma / z_\gamma} \left| \frac{\partial}{\partial z_\gamma} \log \Xi_\Lambda(z_\alpha) \right| d\alpha \right| \\
&\le |z_\gamma| \left| \int_1^{\tilde{z}_\gamma / z_\gamma} \frac{k_\gamma}{1 - \alpha k_\gamma |z_\gamma|} d\alpha \right| = \left| \log \frac{1 - k_\gamma |\tilde{z}_\gamma|}{1 - k_\gamma |z_\gamma|} \right|.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Vamos agora ordenar os polímeros em Λ como $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ com $n = |\Lambda|$ e definir z_Λ^i para $i = 1, \ldots, n$:

$$z_\gamma^i \ = \ \begin{cases} z_\gamma & \text{se } \gamma \in \{\gamma_1, \ldots, \gamma_i\} \\ \tilde{z}_\gamma & \text{se } \gamma \in \{\gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n\} \end{cases} \tag{3.14}$$

Por convenção, podemos assumir $\tilde{z}^0 = \tilde{z}$ e $\tilde{z}^n = z$. Então,

$$\begin{aligned}\left|\log\frac{\Xi_\Lambda(\tilde{z})}{\Xi_\Lambda(z)}\right| &= \left|\log\frac{\Xi_\Lambda(\tilde{z})}{\Xi_\Lambda(\tilde{z}^1)}\frac{\Xi_\Lambda(\tilde{z}^1)}{\Xi_\Lambda(\tilde{z}^2)}\cdots\frac{\Xi_\Lambda(\tilde{z}^{n-1})}{\Xi_\Lambda(z)}\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\Xi_\Lambda(\tilde{z}^{i-1})}{\Xi_\Lambda(\tilde{z}^i)}\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\log\frac{\Xi_\Lambda(\tilde{z}^{i-1})}{\Xi_\Lambda(\tilde{z}^i)}\right|.\end{aligned}$$

Note que quaisquer $i = 1,\dots,n$ $\tilde{z}^{i-1}$ e $\tilde{z}^i$ são tais que $\tilde{z}^{i-1}_\gamma = \tilde{z}^i_\gamma$ para todo $\gamma \in \Lambda$ exceto quando $\gamma = \gamma_i$. Neste caso, $\tilde{z}^{i-1}_\gamma = z_\gamma$ e $\tilde{z}^i_\gamma = \tilde{z}_\gamma$. Isso significa que em cada termo da desigualdade acima podemos aplicar a cota (3.13) e obter:

$$\left|\log\frac{\Xi_\Lambda(\tilde{z})}{\Xi_\Lambda(z)}\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\log\frac{1-k_{\gamma_i}|\tilde{z}_{\gamma_i}|}{1-k_{\gamma_i}|z_{\gamma_i}|}\right| = \sum_{\gamma\in\Lambda}\left|\log\frac{1-k_\gamma|\tilde{z}_\gamma|}{1-k_\gamma|z_\gamma|}\right|,$$

a qual é, de fato, a desigualdade (3.11).

Observação. O Teorema 3.2 é equivalente ao Corolário 1.4. De fato,

$$k_\gamma \ge \prod_{\substack{\tilde{\gamma}\neq\gamma\\ \tilde{\gamma}\not\sim\gamma}}\frac{1}{1-k_{\tilde{\gamma}}r_{\tilde{\gamma}}} \iff k_\gamma r_\gamma \ge r_\gamma\prod_{\substack{\tilde{\gamma}\neq\gamma\\ \tilde{\gamma}\not\sim\gamma}}\frac{1}{1-k_{\tilde{\gamma}}r_{\tilde{\gamma}}} \iff c_\gamma \ge r_\gamma\prod_{\substack{\tilde{\gamma}\neq\gamma\\ \tilde{\gamma}\not\sim\gamma}}\frac{1}{1-c_{\tilde{\gamma}}},$$

onde $c_\gamma = k_\gamma r_\gamma$, isto é,

$$k_\gamma \ge \prod_{\substack{\tilde{\gamma}\neq\gamma\\ \tilde{\gamma}\not\sim\gamma}}\frac{1}{1-k_{\tilde{\gamma}}r_{\tilde{\gamma}}} \iff \frac{c_\gamma}{1-c_\gamma} \ge r_\gamma\prod_{\tilde{\gamma}\not\sim\gamma}\frac{1}{1-c_{\tilde{\gamma}}}$$

ou, fazendo

$$\mu_\gamma = \frac{c_\gamma}{1-c_\gamma},$$

com $\mu_\gamma > 0$. Como $c_\gamma = k_\gamma r_\gamma < 1$, obtemos

$$k_\gamma \ge \prod_{\substack{\tilde{\gamma}\neq\gamma\\ \tilde{\gamma}\not\sim\gamma}}\frac{1}{1-k_{\tilde{\gamma}}r_{\tilde{\gamma}}} \iff \mu_\gamma \ge r_\gamma\prod_{\tilde{\gamma}\not\sim\gamma}(1+\mu_{\tilde{\gamma}}).$$

Assim, o Teorema 3.2 pode ser reformulado como segue: se existe μ_γ r_γ, $\gamma \in \mathcal{P}$ tal que $\mu_\gamma > 0$, $r_\gamma > 0$ e

$$r_\gamma \le \frac{\mu_\gamma}{\prod_{\tilde{\gamma}\not\sim\gamma}(1+\mu_{\tilde{\gamma}})},$$

então,

$$\left|\frac{\partial\log\Xi_\Lambda(z)}{\partial z_\gamma}\right| \le \frac{k_\gamma}{1-k_\gamma|z_\gamma|} \tag{3.15}$$

que é a equação (1.66).

Prova do Teorema 3.2. Usaremos novamente indução na cardinalidade Λ. Para $\Lambda = \emptyset$ a prova é trivial. Assim, assuma que com a hipótese (3.9), a cota (3.10) (e por isso (3.11) são verdadeiras para todos os conjuntos com cardinalidade $< n$ em $\mathcal{P}$. Considere agora $\Lambda \subset \mathcal{P}$ com cardinalidade $|\Lambda| = n$. Lembrando que:

$$\Pi_{\Lambda}^{\gamma_0}(z) = \frac{\partial}{\partial z_{\gamma_0}} \ln \Xi_{\Lambda}(z) = \frac{F_{\Lambda \setminus \{\gamma_0\}}(z)}{1 + z_{\gamma_0} F_{\Lambda \setminus \{\gamma_0\}}(z)}, \tag{3.16}$$

onde

$$F_{\Lambda \setminus \{\gamma_0\}}(z) \; = \; \frac{\Xi_{\Lambda \setminus \Gamma(\gamma_0)}(z)}{\Xi_{\Lambda \setminus \{\gamma_0\}}(z)} \; = \; \frac{\Xi_{\Lambda \setminus \{\gamma_0\}}(\tilde{z})}{\Xi_{\Lambda \setminus \{\gamma_0\}}(z)} \tag{3.17}$$

com $\Gamma(\gamma_0) = \{\gamma \in \Lambda : \gamma \not\sim \gamma_0\}$ e

$$\tilde{z}_{\gamma} \; = \; \begin{cases} z_{\gamma} & \text{se } \gamma \notin \Gamma(\gamma_0) \\ 0 & \text{se } \gamma \in \Gamma(\gamma_0). \end{cases} \tag{3.18}$$

Note que $\tilde{z}_{\gamma}/z_{\gamma} \geq 0$. Assim, podemos aplicar a hipótese de indução em (3.17) e obter

$$|\log F_{\Lambda \setminus \{\gamma_0\}}(z)| \leq \sum_{\gamma \in \Lambda \setminus \gamma_0} \left| \log \frac{1 - k_{\gamma}|\tilde{z}_{\gamma}|}{1 - k_{\gamma}|z_{\gamma}|} \right| = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(\gamma_0) \\ \gamma \neq \gamma_0}} \left| \log \frac{1}{1 - k_{\gamma}|z_{\gamma}|} \right| \leq k_{\gamma_0},$$

de forma que na última desigualdade usamos a hipótese (3.9). Sendo assim,

$$\left| \frac{\partial}{\partial z_{\gamma_0}} \ln \Xi_{\Lambda}(z) \right| \leq \frac{|F_{\Lambda \setminus \{\gamma_0\}}(z)|}{1 - |z_{\gamma_0}||F_{\Lambda \setminus \{\gamma_0\}}(z)|} \leq \frac{k_{\gamma_0}}{1 - |z_{\gamma_0}| k_{\gamma_0}}.$$

□

3.2 Critério de Gruber-Kunz-Fernández-Procacci para o Gás de subconjuntos finitos

Usando uma abordagem próxima à de Miracle-Solé, apresentamos agora uma prova do critério encontrado por Fernández e Procacci [32] para o gás de subconjuntos finitos.

Como vimos anteriormente, os dois obtiveram esta condição aplicando o novo critério obtido por ambos para o gás de polímeros abstratos para este modelo fazendo uma estimativa da função partição, veja a desigualdade 1.83.

Teorema 3.1. *Considere novamente $\mathcal{P}_{\mathbb{V}}$ a coleção de subconjuntos finitos de um conjunto enumerável $\mathbb{V}$ com a relação de incompatibilidade dada pela intersecção $\cap$. Suponhamos que exista um número positivo $a > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{V}$,*

$$\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}_{\mathbb{V}} \\ x \in \gamma}} \rho(\gamma) \; e^{a|\gamma|} \leq e^{a} - 1.$$

Então, para todo $\Lambda \subset \mathbb{V}$ finito,

$$|\Sigma_x^\Lambda|(\rho) \leq a, \tag{3.19}$$

onde $x \in \Lambda$ e

$$|\Sigma_x^\Lambda|(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\subseteq\Lambda^n \\ \exists i:\ x\in\gamma_i}} |\phi^T(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)|\ \rho(\gamma_1)\ldots\rho(\gamma_n).$$

Prova. Primeiro observe que pela propriedade da alternância de sinais de $\phi^T(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, temos

$$|\Sigma_x^\Lambda|(\rho) = -\log \Xi_\Lambda(-\rho) + \log \Xi_{\Lambda\setminus\{x\}}(-\rho) \tag{3.20}$$

A prova será por indução em $|\Lambda|$.

O primeiro passo consiste em determinar a base da prova por indução. Neste caso, provaremos que (3.19) é válida quando Λ contém apenas um ponto.

Seja $\Lambda = \{x\}$, então

$$\begin{aligned}
|\Sigma_x^{\{x\}}|(\rho) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\subseteq(\{x\})^n \\ \exists i:\ x\in\gamma_i}} |\phi^T(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)|\ \rho(\gamma_1)\ldots\rho(\gamma_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} |\phi^T(\{x\},\ldots,\{x\})|\ [\rho(\{x\})]^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ [\rho(\{x\})]^n \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[1 - \frac{1}{e^a}\right]^n = -\log\left[1 - \left(1 - \frac{1}{e^a}\right)\right] = a,
\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade é devida a Identidade de Penrose, pois ela nos garante que $|\phi^T(\{x\},\ldots,\{x\})| = (n-1)!$. Já a desigualdade ocorre por hipótese $\rho(\{x\}) \ \leq 1 - \frac{1}{e^a}$.

Suponha, por hipótese de indução, que a desigualdade (3.19) á satisfeita para um dado Λ e qualquer um de seus subconjuntos. Tome $x \in \mathbb{Z}^d\setminus\Lambda$. Queremos limitar

$$|\Sigma_x^{\Lambda\cup\{x\}}|(\rho) = -\log \Xi_{\Lambda\cup\{x\}}(-\rho) + \log \Xi_\Lambda(-\rho) = -\log \frac{\Xi_{\Lambda\cup\{x\}}(-\rho)}{\Xi_\Lambda(-\rho)}.$$

Sabemos que

$$\Xi_{\Lambda\cup\{x\}}(-\rho) = \Xi_\Lambda(-\rho) - \sum_{S\subset\Lambda} \rho(\{x\}\cup S)\Xi_{\Lambda\setminus S}(-\rho),$$

assim,

$$\frac{\Xi_{\Lambda\cup\{x\}}(-\rho)}{\Xi_\Lambda(-\rho)} = 1 - \sum_{S\subset\Lambda} \rho(\{x\}\cup S)\frac{\Xi_{\Lambda\setminus S}(-\rho)}{\Xi_\Lambda(-\rho)}.$$

Agora, seja $S = \{y_1, \ldots, y_k\}$ com $k = |S|$, então,

$$\frac{\Xi_{\Lambda\backslash S}(-\rho)}{\Xi_\Lambda(-\rho)} = \frac{\Xi_{\Lambda\backslash\{y_1\}}(-\rho)}{\Xi_\Lambda(-\rho)} \frac{\Xi_{\Lambda\backslash\{y_1,y_2\}}(-\rho)}{\Xi_{\Lambda\backslash\{y_1\}}(-\rho)} \frac{\Xi_{\Lambda\backslash\{y_1,y_2,y_3\}}(-\rho)}{\Xi_{\Lambda\backslash\{y_1,y_2\}}(-\rho)} \cdots \frac{\Xi_{\Lambda\backslash\{y_1,\ldots,y_k\}}(-\rho)}{\Xi_{\Lambda\backslash\{y_1,\ldots,y_{k-1}\}}(-\rho)}.$$

O lado direito da equação acima é um produto de $k = |S|$ termos da forma

$$\frac{\Xi_{\tilde{\Lambda}\backslash\{z\}}(-\rho)}{\Xi_{\tilde{\Lambda}}(-\rho)},$$

com $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ e $z \in \tilde{\Lambda}$. Assim, pela hipótese de indução, para cada um desses termos, obtemos

$$\begin{aligned}
\log \frac{\Xi_{\tilde{\Lambda}\backslash\{z\}}(-\rho)}{\Xi_{\tilde{\Lambda}}(-\rho)} &= \log \Xi_{\tilde{\Lambda}\backslash\{z\}}(-\rho) - \log \Xi_{\tilde{\Lambda}}(-\rho) \\
&= -\log \Xi_{\tilde{\Lambda}}(-\rho) + \log \Xi_{\tilde{\Lambda}\backslash\{z\}}(-\rho) \\
&= |\Sigma_z^{\tilde{\Lambda}}|(\rho) \leq a.
\end{aligned}$$

Adotando a convenção $\Lambda\backslash\{y_1, \ldots, y_{i-1}\} = \Lambda$, para $i = 1$,

$$\log \frac{\Xi_{\Lambda\backslash S}(-\rho)}{\Xi_\Lambda(-\rho)} = \sum_{i=1}^{|S|} \log \frac{\Xi_{\Lambda\backslash\{y_1,\ldots,y_i\}}(-\rho)}{\Xi_{\Lambda\backslash\{y_1,\ldots,y_{i-1}\}}(-\rho)} \leq \ |S|\, a$$

donde obtemos,

$$\frac{\Xi_{\Lambda\backslash S}(-\rho)}{\Xi_\Lambda(-\rho)} \leq e^{a|S|}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|\Sigma_x^{\Lambda\cup\{x\}}|(\rho) &= -\log \Xi_{\Lambda\cup\{x\}}(-\rho) + \log \Xi_\Lambda(-\rho) = -\log \frac{\Xi_{\Lambda\cup\{x\}}(-\rho)}{\Xi_\Lambda(-\rho)} \\
&= -\log \left[1 - \sum_{S\subset\Lambda} \rho(\{x\}\cup S) \frac{\Xi_{\Lambda\backslash S}(-\rho)}{\Xi_\Lambda(-\rho)}\right] \leq -\log \left[1 - \sum_{S\subset\Lambda} \rho(\{x\}\cup S) e^{a|S|}\right] \\
&= -\log \left[1 - \sum_{S\subset\Lambda} \rho(\{x\}\cup S) e^{a|S|}\right] = -\log \left[1 - \frac{1}{e^a} \sum_{S\subset\Lambda} \rho(\{x\}\cup S) e^{a(|S|+1)}\right] \\
&\leq -\log \left[1 - \frac{1}{e^a}(e^a - 1)\right] = a.
\end{aligned}$$

e a indução está completa. □

Capítulo 4

Aplicações à Combinatória e Teoria dos Grafos: o Método Probabilístico

Entre os muitos assuntos estudados e desenvolvidos no século passado por Paul Erdös, um dos mais prolíficos matemáticos de todos os tempos, está o Método Probabilístico. Uma técnica não-construtiva que é hoje usada em diversas áreas da matemática tais como Teoria dos Números, Combinatória, Álgebra Linear e Teoria dos Grafos.

Aparentemente, Szele em [72], foi quem primeiro explorou essa técnica. Ele mostrou que existem torneios de n vértices com pelo menos $n!2^{-(n-1)}$ caminhos hamiltonianos e também conjecturou que o número máximo de caminhos hamiltonianos em um torneio de n vértices é no máximo $\frac{n!}{(2-o(1))^n}$. Essa conjectura foi provada em 1990[4].

De 1947 em diante Erdös publicou uma série de trabalhos, entre eles [25, 26, 27, 28], aplicando o Método Probabilístico em vários problemas, popularizando a técnica de tal forma que há alguns anos atrás o método era chamado de "Método de Erdös"[3].

A abordagem é a seguinte: para assegurar a existência de determinados objetos (estruturas combinatórias, grafos com determinadas propriedades pré-estabelicidas, etc) constrói-se um espaço de probabilidade onde nossos objetos de interesse tem probabilidade positiva de ocorrerem. Nesta situação, em particular, tais objetos obrigatoriamente existem.

É vasta a literatura com resultados obtidos pelo próprio Erdös e por muitos outros matemáticos usando essa poderosa ferramenta, mais recentemente o livro [3], que contém muitas aplicações mostrando as diferentes maneiras de se aplicar a técnica. Dentre os diferentes enfoques que podem ser usados ao aplicarmos o Método Probabilístico em um problema estão o Método do Primeiro Momento, o Método do Segundo Momento, Concentração via Martingais, argumentos de contagem e o Lema local de Lovász. A contribuição desta tese é neste útimo enfoque.

Usando o trabalho de Shearer [69], Scott e Sokal mostraram a inesperada conexão entre os aparentemente desconexos Critério de Dobrushin para convergência da expansão em polímeros e Lema local de Lovász.

Um dos objetivos deste capítulo é chamar a atenção para o fato de que o Lema local de Lovász pode ser enunciado de tal forma que seja equivalente à convergência da expansão em polímeros (e não a um critério específico desta). Em particular, não só a melhora de Fernández e Procacci traz conseqüências ao lema, bem como novos critérios de convergência que no futuro surjam, poderão nos fornecer resultados mais fortes aumentando o número de exemplos onde o Lema de Lovász é eficaz.

Este capítulo é organizado da seguinte forma: na primeira seção introduzimos o Lema local de Lovász obtido por Erdös e Lovász em [27], e sua versão mais geral devida a Spencer [71].

Na Seção 4.2, esclarecemos a conexão entre o Lema de Lovász e a Mecânica Estatística ou, mais especificamente, os critérios de convergência para o gás de rede, percebida por Scott e Sokal.

Na Seção 4.3, comparamos as cotas inferiores obtidas por Spencer e Shearer.

Já na Seção 4.4, apresentamos nosso resultado que melhora o Lema de Lovász.

Por fim, na última seção, aplicamos nossa versão do Lema de Lovász em alguns exemplos clássicos comparando com os resultados conhecidos até então.

4.1 O Lema Local de Lovász

A menos que se fale o contrário, nesta seção X denotará um conjunto finito e G um grafo tal que $V(G) = X$.

Problema: Você possui uma coleção $(A_x)_{x\in X}$ de eventos ruins num determinado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ os quais deseja evitar. Dentro da filosofia do Método Probabilístico você quer descobrir condições, as mais gerais possíveis, de modo a garantir que com probabilidade positiva nenhum destes eventos ruins ocorre, ou seja, quer o mínimo de restrições possíveis para que

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x\Big) > 0, \tag{4.1}$$

onde $\overline{A}_x$ denota o complementar de A_x.

Exemplo 4.1. *Seja* $(A_x)_{x\in X}$ *uma família de eventos independentes em* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Basta exigir que $\mathbb{P}(A_x) = p_x < 1, \forall\, x \in X$, pois neste caso:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) = \prod_{x\in X} \mathbb{P}(\overline{A}_x) = \prod_{x\in X} (1 - p_x) > 0.$$

Exemplo 4.2. *Seja $(A_x)_{x\in X}$ uma família de eventos em $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tal que $\mathbb{P}(A_x) = p_x$ sobre a qual você não sabe quais são independentes.*

Como $\mathbb{P}(\bigcup_{x\in X} A_x) \leq \sum_{x\in X} \mathbb{P}(A_x) = \sum_{x\in X} p_x$, impondo que $\sum_{x\in X} p_x < 1$ obtemos o resultado. De fato,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) = \mathbb{P}(\overline{\bigcup_{x\in X} A_x}) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{x\in X} A_x) \geq 1 - \sum_{x\in X} p_x > 0.$$

Exemplo 4.3. *Seja $(A_i)_{i\in[n]}$ uma família de eventos em $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tal que $\mathbb{P}(A_i) = p\ \forall\ i \in [n]$, ou seja, o mesmo exemplo anterior onde agora todos os eventos são equiprováveis.*

Como no exemplo anterior, basta tomar $n.p < 1$.

Os dois últimos exemplos não levam em conta a dependência entre os eventos. A idéia então é que, caso seja possível usar esta informação, obteremos maiores valores para as probabilidades p_x de forma ainda a garantir $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) > 0$.

O primeiro resultado nesta direção foi obtido por Paul Erdös e László Lovász em 1973 [27], o qual continha a primeira versão do então chamado *Lema Local de Lovász*. Antes de enunciar o teorema precisamos de algumas definições:

Definição 4.1. *Seja A um evento em um espaço de probabilidade e $(A_x)_{x\in X}$ uma família de eventos. Dizemos que A é* **mutuamente independente** *da família $(A_x)_{x\in X}$ quando A é independente de todos os conjuntos da forma $\bigcap_{x\in S} A_x$, com $S \subseteq X$.*

Definição 4.2. *Dizemos que G é um* **grafo de dependência** *para a família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ em um espaço de probabilidade quando, para cada $x \in X$, A_x é mutuamente independente da família $\{A_y : y \in X\backslash\Gamma^*(x)\}$.*

É importante ressaltar que o grafo de dependência não é único, basta observar que dado um grafo de dependência G para uma família de eventos $(A_x)_{x\in X}$, qualquer outro grafo obtido a partir deste adicionando elos a G será um grafo de dependência para a família. O resultado obtido por Erdös e Lovász pode então ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 4.1. (Erdös e Lovász) *Seja G um grafo de dependência para uma família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ com grau máximo Δ e $\mathbb{P}(A_x) = p_x$. Suponha que $4p_x\Delta \leq 1$, para todo $x \in X$. Então, $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) > 0$.*

A prova do teorema é por indução, assim como a prova da versão mais geral obtida por Joel Spencer em 1977 [71] que apresentaremos agora. De fato, segundo o próprio Spencer, esta formulação da prova foi-lhe comunicada por Cecil Rousseau. Esta é a formulação mais popular hoje em dia e a mais geral, no caso de grafos não orientados, que antecede nosso resultado o qual apresentaremos na seção seguinte.

O *Lema Local de Lovász* enunciado por Spencer foi:

Teorema 4.2. (Lema Local de Lovász) *Seja G um grafo de dependência para a família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ e suponha que existam $(r_x)_{x\in X}$ números em $[0,1)$ tais que, para cada x,*

$$\mathbb{P}(A_x) = p_x \leq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)} (1 - r_y). \tag{4.2}$$

Então, $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq \prod_{x\in X}(1 - r_x) > 0$.

Prova: Suponhamos que $|X| = n$, ou seja, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Assim, não só nesta demonstração mas em várias outras, sem perda de generalidade, vamos supor que $X = [n] = \{1, 2, ..., n\}$ seguindo a tradição de vários artigos sobre este teorema.

Afirmação: Para qualquer que seja $i \in [n]$ e $S \subseteq [n]$ com $i \notin S$, temos que:

$$\mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j\in S} \overline{A}_j) \leq r_i. \tag{4.3}$$

O teorema segue imediatamente da afirmação, de fato:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i) &= \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A}_i).\mathbb{P}(\overline{A}_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A}_i) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-2} \overline{A}_i).\mathbb{P}(\overline{A}_{n-1} | \bigcap_{i=1}^{n-2} \overline{A}_i).\mathbb{P}(\overline{A}_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A}_i) \\
&= \mathbb{P}(\overline{A}_1).\mathbb{P}(\overline{A}_2 | \overline{A}_1).\mathbb{P}(\overline{A}_3 | \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2)...\mathbb{P}(\overline{A}_{n-1} | \bigcap_{i=1}^{n-2} \overline{A}_i).\mathbb{P}(\overline{A}_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A}_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A}_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A}_j) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{A}_j)) \geq \prod_{i=1}^{n}(1 - r_i) \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Prova da afirmação: Em dois casos é trivial, quando $S = \emptyset$ e quando $S \cap \Gamma(i) = \emptyset$. Nestes dois casos temos que $\mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j\in S} \overline{A}_j) = \mathbb{P}(A_i)$ e por hipótese $\mathbb{P}(A_i) \leq r_i \prod_{j\in\Gamma(i)} (1 - r_j) \leq r_i$.

Suponhamos agora que $S \cap \Gamma(i) \neq \emptyset$. Seja $S = S_1 \cup S_2$, onde $S_1 = S \cap \Gamma(i)$ e $S_2 = S \backslash S_1$.

A prova é por indução na cardinalidade do conjunto S. A base de indução é facilmente verificada pois a desigualdade é valida quando $S = \emptyset$. Suponhamos então que para qualquer $T \subset S$, $T \neq S$, a desigualdade (4.3) seja verdadeira.

Assim, se $S_1 = \{j_1, j_2, ..., j_\ell\}$, por hipótese de indução segue que

$$\mathbb{P}(A_{j_k}| \bigcap_{m=1}^{k-1} \overline{A}_{j_m} \cap \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j) \leq r_{j_k}, \quad \forall \; 2 \leq k \leq \ell. \tag{4.5}$$

Quando $k = 1$ a desigualdade é novamente garantida pela hipótese de indução:

$$\mathbb{P}(A_{j_1}| \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j) \leq r_{j_1}. \tag{4.6}$$

Assim como fizemos antes, temos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bigcap_{j_m \in S_1} \overline{A}_{j_m}| \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j) &= \prod_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(\overline{A}_{j_k}| \bigcap_{m=1}^{k-1} \overline{A}_{j_m} \cap \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j) \\ &= \prod_{k=1}^{\ell} (1 - \mathbb{P}(A_{j_k}| \bigcap_{m=1}^{k-1} \overline{A}_{j_m} \cap \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j)) \\ &\geq \prod_{k=1}^{\ell} (1 - r_{j_k}) \geq \prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j), \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i| \bigcap_{j \in S} \overline{A}_j) &= \mathbb{P}(A_i| \bigcap_{j_m \in S_1} \overline{A}_{j_m} \cap \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap \bigcap_{j_m \in S_1} \overline{A}_{j_m}| \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j)}{\mathbb{P}(\bigcap_{j_m \in S_1} \overline{A}_{j_m}| \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j)} \\ &\leq \frac{\mathbb{P}(A_i \cap \bigcap_{j_m \in S_1} \overline{A}_{j_m}| \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j)}{\prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j)} \leq \frac{\mathbb{P}(A_i| \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j)}{\prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A_i)}{\prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j)} \leq \frac{r_i \prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j)}{\prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j)} = r_i. \end{aligned} \tag{4.8}$$

□

Na penúltima igualdade usamos o fato de que S_2 é composto somente por vértices que não são adjacentes a i e, sendo G um grafo de dependência, A_i é mutuamente independente da família $(A_j)_{\{j \in S_2\}}$. Salientamos que a demonstração usa fortemente a identidade $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_i| \bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j)$, onde $S_2 \subseteq [n] \backslash \Gamma^*(i)$.

Esta última observação permite enfraquecer as hipóteses do teorema e nos leva à seguinte definição:

Definição 4.3. *Dizemos que G é um* **grafo de dependência assimétrico**[1] *para a família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ em um espaço de probabilidade quando, para cada $x \in X$,*

$$\mathbb{P}(A_x | \bigcap_{y\in Y} \overline{A}_y) \leq \mathbb{P}(A_x), \tag{4.9}$$

para todo $Y \subseteq X \backslash \Gamma^*(x)$.

Observação 4.1. *Todo grafo de dependência é em particular um grafo de dependência assimétrico.*

Este fato foi observado por Spencer e Erdös em 1991 [28], que perceberam a importância de trabalhar com grafos mais gerais. O novo conceito foi usado para uma nova aplicação do Lema Local de Lovász no estudo dos *Latin Transversals*. Veremos este exemplo no detalhe ainda neste capítulo, no qual será aplicado a generalização do Lema de Lovász obtida nesta tese.

O resultado obtido por Spencer e Erdös é o seguinte:

Teorema 4.3. *Suponha que G é um grafo de dependência assimétrico para a família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ e suponha que existam $(r_x)_{x\in X}$ números em $[0, 1)$ tais que, para cada x,*

$$\mathbb{P}(A_x) = p_x \leq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)} (1 - r_y). \tag{4.10}$$

Então, $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq \prod_{x\in X}(1 - r_x) > 0$.

Prova: Análoga à do teorema anterior, observando que a penúltima igualdade da demonstração é substituída pela desigualdade $\mathbb{P}(A_i | \bigcap_{j\in S_2} \overline{A}_j) \leq \mathbb{P}(A_i)$. □

Agora podemos enunciar a generalização natural do teorema obtido por Erdös e Lovász. Esta versão é chamada de *caso simétrico*, isto porque é muitas vezes enunciada no caso onde todos os eventos tem uma mesma probabilidade p de ocorrerem ou tomando $p = \sup_{i\in[n]}\{\mathbb{P}(A_i) = p_i\}$.

Pela praticidade na verificação das hipóteses, esta versão do teorema é muitas vezes preferida pelos autores. Neste caso não é necessário ter uma informação mais refinada a respeito da estrutura do grafo de dependência, apenas o valor da probabilidade dos eventos (ou o supremo destas) e o grau máximo Δ do grafo de dependência.

Teorema 4.4. (Lema Local de Lovász - caso simétrico) *Seja G um grafo de dependência para uma família de eventos $(A_i)_{i\in[n]}$ com grau máximo Δ e $\mathbb{P}(A_i) = p_i$. Suponha $p.(\Delta+1).e \leq 1$ e considere $p = \sup_{i\in[n]} p_i$. Então $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i) > 0$.*

[1]A nomenclatura usual em inglês para este tipo de grafo é *lopsidependency graph*.

Prova: Segue do Lema de Lovász usual, tomando $r_i = \frac{1}{\Delta+1}$ para todo $i \in [n]$. De fato, para ver isso precisamos verificar a hipótese do Lema de Lovász, ou seja, para cada $i \in [n]$ devemos ter:

$$\mathbb{P}(A_i) = p_i \leq r_i \prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j). \tag{4.11}$$

Mas como definimos $r_i = \frac{1}{\Delta+1}$, temos:

$$\begin{aligned} \prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j) &= \prod_{j \in \Gamma(i)} \left(1 - \frac{1}{\Delta+1}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{\Delta+1}\right)^{\Delta} \\ &= \left(\frac{\Delta}{\Delta+1}\right)^{\Delta} = \left(\frac{\Delta+1}{\Delta}\right)^{-\Delta} = \left(1 + \frac{1}{\Delta}\right)^{-\Delta} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Lembre que a seqüência $b_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ é crescente e converge para o número de Euler, portanto a seqüência $\frac{1}{b_k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k}$ é decrescente e converge para $\frac{1}{e}$.

Agora basta observar que, como por hipótese temos $p.(\Delta+1).e \leq 1$, então para todo $i \in [n]$:

$$p_i \leq p \leq \frac{1}{(\Delta+1)}.\frac{1}{e} \leq \frac{1}{(\Delta+1)}.\left(1 + \frac{1}{\Delta}\right)^{-\Delta} = r_i \left(1 + \frac{1}{\Delta}\right)^{-\Delta} \leq r_i \prod_{j \in \Gamma(i)} (1 - r_j) \tag{4.13}$$

□

Antes de entrarmos nos trabalhos de Shearer, Scott e Sokal, que nos ajudarão a entender a ligação entre o Lema de Lovász e a convergência da expansão em polímeros, cabe ressaltar que em 1996 Dobrushin [21, 22] chegou na mesma cota que Spencer aparentemente desconhecendo completamente os trabalhos de Spencer, Erdös e Lovász.

O fato até aqui parece milagroso. Porém, após expormos o resultado de Shearer [69] ficará claro que Scott e Sokal [67] perceberam que Shearer havia provado que a função partição não se anulava dentro do raio de convergência estipulado por Dobrushin.

Ao apresentar a condição exigida pelo Lema Local de Lovász para um pesquisador de Mecânica Estatística sem falar que se trata da hipótese do lema:

Existem $(r_x)_{x \in X}$ números em $[0, 1)$ tais que, para cada $x \in X$,

$$p_x \leq r_x \prod_{y \in \Gamma(x)} (1 - r_y), \tag{4.14}$$

Se este desconhecesse o trabalho de Scott e Sokal, provavelmente responderia que o enunciado se refere ao Critério de Dobrushin.

De fato, com uma fácil mudança de variáveis podemos colocar esta desigualdade na forma que usualmente encontramos a condição de Dobrushin nos trabalhos em Mecânica Estatística:

Tome $0 \leq \boldsymbol{\mu} = (\mu_x)_{x\in X}$ definida por $\mu_x = \frac{r_x}{1-r_x}$, ou seja, $r_x = \frac{\mu_x}{1+\mu_x}$ e então a desigualdade $p_x \leq r_x \displaystyle\prod_{y\in\Gamma(x)} (1-r_y)$ nas novas variáveis pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} p_x &\leq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)} (1-r_y) = \frac{\mu_x}{1+\mu_x} \prod_{y\in\Gamma(x)} \left(1 - \frac{\mu_y}{1+\mu_y}\right) \\ &= \frac{\mu_x}{\displaystyle\prod_{y\in\Gamma^*(x)} (1+\mu_y)}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Assim, obtemos

Existem $(\mu_x)_{x\in X}$ *números em* $[0,+\infty)$ *tais que, para cada* $x \in X$,

$$p_x \leq \frac{\mu_x}{\displaystyle\prod_{y\in\Gamma^*(x)} (1+\mu_y)} = \frac{\mu_x}{\varphi_x^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\mu})} \equiv R_x^{\mathrm{D}}. \tag{4.16}$$

E esta é a maneira que apresentamos o Critério de Dobrushin no Capítulo 1.

Outro ponto a ressaltar é que o Lema de Lovász não só fornece uma cota superior para uma região para as probabilidades $(p_x)_{x\in X}$ onde temos a garantia de que $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) > 0$, mas também nos fornece uma cota inferior para a probabilidade $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq \prod_{x\in X}(1-p_x) > 0$. Esta cota inferior é válida dentro das hipóteses do Lema de Lovász, ou seja, dentro do polidisco de poli-raio $(R_x^{\mathrm{D}})_{x\in X}$ proveniente do critério de Dobrushin.

O que veremos a seguir é que Shearer [69] mostrou em 1985, entre outras coisas, que se a pressão do gás de rede é analítica em um polidisco de poli-raio $(R_x^{\mathrm{D}})_{x\in X}$, então a função partição $Z_G(\mathbf{w})$ em particular não se anula neste polidisco fechado e ainda é possível garantir que $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) > 0$.

Scott e Sokal [67] perceberam o fato e esclareceram esta conexão somente em 2005. Note que dentro do polidisco de poli-raio $(R_x^{\mathrm{D}})_{x\in X}$ e pelo que apresentamos até agora, existem duas cotas inferiores para $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x)$: a que foi obtida por Spencer $\prod_{x\in X}(1-p_x)$ e a que foi obtida por Shearer $Z_G(-\mathbf{p})$.

A relação entre estas cotas veremos mais tarde. Na verdade, dentro do polidisco $\{(w_x)_{x\in X} : |w_x| \leq R_x^{\mathrm{D}}\}$ proveniente do Critério de Dobrushin valem as seguintes desigualdades:

$$|Z_G(\mathbf{w})| \geq Z_G(-\mathbf{p}) \geq \prod_{x\in X} (1-p_x). \tag{4.17}$$

Antes de apresentar o resultado de Shearer que foi revisitado por Scott e Sokal, introduziremos alguns fatos sobre o gás de rede. A referência para a próxima seção é o excelente artigo de ambos [67] e o trabalho de Shearer [69].

4.2 A conexão com o Gás de Rede

Já estudamos o gás de polímeros abstratos, agora vamos citar alguns fatos de um modelo mais específico que citamos rapidamente no início para melhor entendermos o resultado de Shearer.

Como antes, nosso enfoque é no caso de interação do tipo caroço duro. Um análogo abstrato dos modelos de gases em Mecânica Estatística que usam a formulação do ensemble grande canônico pode ser posto da seguinte forma:

Seja X um conjunto finito que fará o papel do conjunto de posições onde as partículas ou o centro de massa destas podem estar. O nome *gás de rede* se refere ao fato que em geral estes pontos estão dispostos em um ambiente espacial, por exemplo $\mathbb{Z}^2$. Em casos assim existe a noção de distância e podemos refinar o modelo impondo, por exemplo, a exclusão dos primeiros vizinhos, proibindo dessa forma que duas posições vizinhas na rede estejam ocupadas simultaneamente.

Um caso bem simples é quando para cada um dos pontos de X pode existir ou não uma partícula, e no máximo uma, e que ainda a interação dependa somente da distância entre elas. Vamos supor também que as partículas estejam dispostas numa rede onde os pontos de X são muito distantes de modo a não existir interação entre elas.

Digamos que a *atividade* ou *fugacidade* de cada partícula é a mesma $w \in \mathbb{C}$. Lembre que nos modelos esta quantidade contém informações como temperatura do sistema, entre outros. Neste caso a função partição grande canônica se escreve da maneira mais simples possível:

$$\Xi(w) = (1+w)^{|X|}. \tag{4.18}$$

Note que isso nada mais é do que a soma de todas as possibilidades de existir ou não partícula em cada um dos pontos de X. Se introduzirmos um *função interação de pares* do tipo caroço duro *auto-repulsiva* $W : X \times X \to \{0, 1\}$, onde o adjetivo de auto-repulsivo se refere ao fato que cada posição da rede só pode ter uma única partícula ($W(x, x) = 0 \; \forall \; x \in X$). A função partição pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Xi(w) = (1+w)^{|X|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\subseteq X^n} w^n \prod_{1\leq i<j\leq n} W(x_i, x_j) \tag{4.19}$$

Vamos generalizar um pouco considerando que as atividades não são todas iguais. Trabalharemos daqui pra frente no caso onde temos um *vetor atividade* $\mathbf{w} = (w_x)_{x\in X} \in \mathbb{C}^X$ e também vamos supor que existe interação entre as partículas.

A maneira que faremos isso é introduzindo um grafo $G = (X, E(G))$ cujos elos são determinados pela interação W e vice-versa, ou seja, se $x \neq y$ então $xy \in E(G)$ se e somente se $W(x, y) = 0$.

Desta forma, fica claro que fixar a interação de pares W é o mesmo fixar um grafo G cujo conjunto de vértices é X. Assim, podemos considerar modelos mais gerais como, por exemplo, o gás de rede com uma interação onde as partículas interagem com os seus primeiros vizinhos determinados pelo grafo. Em $\mathbb{Z}^2$ cada ponto x teria quatro vizinhos. Se a posição x estivesse ocupada por uma partícula, então as quatro posições vizinhas deveriam estar vazias. Ainda poderiam ser considerados gases com exclusão dos primeiros e segundos vizinhos, primeiros segundos e terceiros etc

Assim, seguindo a notação de Scott e Sokal [67], a função partição Ξ que é determinada pelo vetor atividade $\mathbf{w}$ e pela interação W, pode ser escrita na forma:

$$Z_W(\mathbf{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\subseteq X^n} \left(\prod_{i=1}^{n} w_{x_i} \right) \prod_{1\leq i<j\leq n} W(x_i, x_j), \tag{4.20}$$

ou seja,

$$Z_W(\mathbf{w}) = \sum_{T\subseteq X} \left(\prod_{x\in T} w_x \right) \left(\prod_{\{x,y\}\subseteq T} W(x, y) \right). \tag{4.21}$$

Como o caso considerado aqui é o do gás com interação repulsiva do tipo caroço duro, dada W construímos o grafo G e, reciprocamente, dado G podemos determinar os pares para os quais W vale zero ou 1. Também podemos escrever a função partição em função do grafo G, em outras palavras, a função (4.21) de fato pode ser escrita como:

$$Z_G(\mathbf{w}) = \sum_{\substack{T\subseteq X \\ T\in I(G)}} \prod_{x\in T} w_x \tag{4.22}$$

onde $I(G)$ detona a família de *subconjuntos independentes* em relação ao grafo G do conjunto $X = V(G)$.

Definição 4.4. *Dado um grafo $G = (V, E)$ dizemos que $T \subseteq V$ é* **independente** *em relação ao grafo G se não existe elo de E ligando pontos de T.*

Definição 4.5. *Dado um grafo $G = (V, E)$ o* **polinômio de conjuntos independentes**[2] *de G é dado por*

$$Z_G(\mathbf{w}) = \sum_{\substack{T\subseteq X \\ T\in I(G)}} \prod_{x\in T} w_x. \tag{4.23}$$

[2] A nomenclatura em inglês é independent-set polynomial

Em geral, nos artigos de combinatória e Teoria dos Grafos, ver por exemplo [18], o polinômio de conjuntos independentes é encontrado no caso mais restrito onde todas as atividades coincidem, ou seja,

$$Z_G(w) = \sum_{\substack{T \subseteq X \\ T \in I(G)}} w^{|T|}, \tag{4.24}$$

no entanto, usaremos a verão mais geral de várias variáveis.

Assim, o polinômio de conjuntos independentes de um grafo $G = (X, E)$ é a função partição do gás com interação W do tipo caroço duro construída a partir do conjunto de elos E.

O que veremos a seguir é que se nos restringirmos a um polidisco onde a função partição não possui zeros, ou seja, se as probabilidades $\mathbf{p} = (p_x)_{x \in X}$ da família de eventos $(A_x)_{x \in X}$ estão neste polidisco, então o teorema de Shearer nos garante que $\mathbb{P}(\bigcap_{x \in X} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) > 0$.

Para ajudar a entender o significado bem como a prova do resultado de Shearer e já preparando para a seção seguinte, lembramos um teorema de Scott e Sokal que prova uma série de equivalências entre afirmações sobre o gás de rede:

Teorema 4.5. (Scott e Sokal) *Considere um gás de rede em X com interação do tipo caroço duro auto repulsiva determinada pelos elos do grafo $G = (X, E)$ e seja $\mathbf{R} = (R_x)_{x \in X} \geq \mathbf{0}$.*

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $-\mathbf{R} = (-R_x)_{x \in X}$ pertence a componente conexa do conjunto $Z_G^{-1}(0, +\infty) \cap (-\infty, 0]^X$ que contém o vetor nulo $\mathbf{0}$.

(2) $Z_G(\mathbf{w}) > 0$, para todo $\mathbf{w}$ satisfazendo $-\mathbf{R} \leq \mathbf{w} \leq \mathbf{0}$.

(3) $Z_G(\mathbf{w}) \neq 0$, para todo $\mathbf{w}$ satisfazendo $|\mathbf{w}| \leq \mathbf{R}$.

(4) A série de Taylor de $\log Z_G(\mathbf{w})$ em torno do vetor $\mathbf{0}$ é convergente em $\mathbf{w} = -\mathbf{R}$.

(5) A série de Taylor de $\log Z_G(\mathbf{w})$ é absolutamente convergente para $|\mathbf{w}| \leq \mathbf{R}$.

(6) $Z_G(-\mathbf{R}\mathbf{1_S}) > 0$ para todo $S \subseteq X$, onde $(-\mathbf{R}\mathbf{1_S})_x = R_x$ quando $x \in S$ e zero caso contrário.

(7) $Z_G(-\mathbf{R}) > 0$ e $P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{R}; S) \geq 0$ para todo $S \subseteq X$, onde

$$Z_G(\mathbf{w}; S) = \sum_{\substack{T \in I(G) \\ S \subseteq T \subseteq X}} \prod_{x \in T} w_x. \tag{4.25}$$

(8) Existe uma medida de probabilidade P definida em 2^X tal que $P(\emptyset) > 0$ e para cada $S \subseteq X$

$$\sum_{T : T \supseteq S} P(T) = \left(\prod_{x \in S} w_x \right) \left(\prod_{\{x,y\} \subseteq S} W(x, y) \right). \tag{4.26}$$

Lembre que se $x \neq y$ então $W(x, y) = 0$ se, e somente se, $xy \in E$.

Existe uma única probabilidade satisfazendo estas condições e esta é definida por

$$P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{R}; S) \tag{4.27}$$

para todo $S \subseteq X$. Em particular, $P(\emptyset) = Z_G(-\mathbf{R}) > 0$.

Prova: Ver [67] página 17.

Na verdade boa parte deste teorema é válido para um gás mais geral: as 5 primeiras afirmações são equivalentes para qualquer gás com interação do tipo repulsiva $0 \leq W(x, y) \leq 1$, não necessariamente do tipo caroço duro.

Definição 4.6. *Denotaremos por $R(G)$ o conjunto de todos os vetores $[0, +\infty)^X$ satisfazendo as condições do teorema (4.5).*

É feito um estudo sobre as diversas propriedades do conjunto $R(G)$ em [67], em particular temos:

Proposição 4.1. *Para qualquer gás de rede repulsivo ($0 \leq W(x, y) \leq 1$) temos que:*

(a) $R(G)$ é um aberto de $[0, +\infty)^X$.

(b) Se $\mathbf{0} \leq \mathbf{R}' \leq \mathbf{R}$ e $\mathbf{R} \in R(G)$ então $\mathbf{R}' \in R(G)$.

(c) Se $\mathbf{R} \in \partial R(G)$ em $[0, +\infty)^X$ então $Z_G(-\mathbf{R}) = 0$.

Prova: O item (a) é imediato do item (1) do teorema (4.5), e o item (b) segue direto do item (3) do mesmo teorema. Para provar (c) lembre que $\partial R(G) = \overline{R(G)} \backslash R(G)$ e suponhamos por absurdo que $\mathbf{R} \in \partial R(G)$ e que $Z_G(-\mathbf{R}) > 0$. Note que já sabíamos que $Z_G(-\mathbf{R}) \geq 0$ pois $\mathbf{R} \in \overline{R(G)}$ e Z_G é contínua e positiva quando restrita a $R(G)$. Então, $-\mathbf{R}$ pertence à componente conexa do conjunto $Z_G^{-1}(0, +\infty) \cap (-\infty, 0]^X$ que contém o vetor nulo $\mathbf{0}$. Para ver isso basta observar que o conjunto $-R(G) \cup \{-\mathbf{R}\}$ é conexo, onde $-R(G) = \{-\mathbf{p} : \mathbf{p} \in R(G)\}$. Assim teríamos que $\mathbf{R} \in R(G)$, absurdo. $\square$

Vejamos agora um pequeno lema necessário antes de provarmos o resultado de Shearer que conectou as duas teorias:

Lema 4.1. *Seja $(A_i)_{i \in [n]}$ uma coleção de eventos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e seja $S \subseteq [n]$, então $\mathbb{P}(\bigcap_{j \in S} \overline{B}_j) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|T|} \mathbb{P}(\bigcap_{j \in T} B_j)$.*

Prova: Para cada $T \subseteq S$ defina $f(T) = \mathbb{P}(\bigcap_{j\in T} B_j)$.

Agora, sobre os conjuntos Z tais que $T \subseteq Z \subseteq S$ defina a função

$$g(Z) = \mathbb{P}(\bigcap_{j\in Z} B_j \cap \bigcap_{j\in S\setminus Z} \overline{B}_j). \tag{4.28}$$

Assim

$$f(T) = \sum_{\substack{Z:\\ T\subseteq Z\subseteq S}} g(Z) \tag{4.29}$$

e do princípio de Inclusão-Exclusão[3] segue que

$$g(T) = \sum_{\substack{Z:\\ T\subseteq Z\subseteq S}} (-1)^{|Z|-|T|} f(Z). \tag{4.30}$$

Em particular, quando $T = \emptyset$, temos

$$g(\emptyset) = \mathbb{P}(\bigcap_{j\in S} \overline{B}_j) = \sum_{\substack{Z:\\ Z\subseteq S}} (-1)^{|Z|} f(Z) = \sum_{Z\subseteq S} (-1)^{|Z|}\mathbb{P}(\bigcap_{j\in Z} B_j). \tag{4.31}$$

□

Teorema 4.6. (Shearer) *Seja G um grafo de dependência para uma família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ com $\mathbb{P}(A_x) = p_x$. Suponha que $P(S) = (-1)^{|S|}Z_G(-\mathbf{p}; S) \geq 0$, para todo $S \subseteq X$.*

Então $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) = P(\emptyset)$ e esta cota inferior é a melhor possível.

Prova : Se $|X| = n$ então podemos assumir que $X = [n]$ e consideramos o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ onde $\Omega = \{0, 1\}^n$ é o conjunto das seqüências de zeros e uns e $\mathcal{P}(\Omega)$ é o conjunto das partes de Ω.

Tome a seguinte família dos cilindros $(B_i)_{i\in[n]}$, onde $B_i = \{(a_1, ..., a_n) \in \Omega : a_i = 1\}$ e a medida $\tilde{\mathbb{P}}$ é definida por

$$\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} B_i) = \sum_{\substack{T:\\ S\subseteq T\subseteq[n]}} P(T) = \sum_{\substack{T:\\ S\subseteq T\subseteq[n]}} (-1)^{|T|} Z_G(-\mathbf{p}; T), \tag{4.32}$$

onde, como antes

$$Z_G(\mathbf{p}; S) = \sum_{\substack{S\subseteq T\subseteq[n]:\\ T\in I(G)}} \prod_{i\in T} p_i. \tag{4.33}$$

[3] Veja o apêndice (A)

Aqui adotamos a convenção padrão de que a soma de zero parcelas é zero e o produto de zero fatores é 1.

O valor de $\tilde{\mathbb{P}}$ sobre a álgebra gerada pelos cilindros determina completamente a medida. Mostraremos agora que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \tilde{\mathbb{P}})$ é de fato um espaço de probabilidade.

Se $\emptyset \neq S \subseteq [n]$ não é um conjunto independente em relação a G, isto é, se existem dois vértices i e j em S tais que $\{i, j\} \in E(G)$, então não existem conjuntos independentes em $I(G)$ que contém S. Isso implica que $Z_G(\mathbf{p}; S)$ é uma soma de zero parcelas, que por convenção é zero.

Assim, quando o conjunto $\{i \in [n] : i \in S\}$ não é um conjunto independente para o grafo G, temos $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} B_i) = 0$.

Por outro lado, se $S \subseteq [n]$ é independente,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} B_i) &= \sum_{\substack{T:\\ S\subseteq T\subseteq [n]}} P(T) = \sum_{\substack{T:\\ S\subseteq T\subseteq [n]}} (-1)^{|T|} Z_G(-\mathbf{p}; T) \\
&= \sum_{\substack{T:\\ S\subseteq T\subseteq [n]}} (-1)^{|T|} \sum_{\substack{R:\\ S\subseteq T\subseteq R\subseteq [n]\\ R\in I(G)}} \prod_{i\in R} (-p_i) \\
&= \sum_{\substack{R:\\ S\subseteq R\subseteq [n]\\ R\in I(G)}} \prod_{i\in R} p_i \sum_{\substack{T:\\ S\subseteq T\subseteq R\subseteq [n]}} (-1)^{|R|-|T|} = \prod_{i\in S} p_i. \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

Quando $S = \emptyset$, $\bigcap_{i\in S} B_i = \{(a_1, ..., a_n) \in \Omega : a_i = 1 \text{ se } i \in \emptyset\} = \Omega$. Então podemos definir diretamente $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in\emptyset} B_i) = 1$ e isso está consistente com nossa convenção acima, isto é, está coerente com o produto de zero fatores resultar 1. Ou seja

$$\tilde{\mathbb{P}}(\Omega) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in\emptyset} B_i) = \prod_{i\in\emptyset} p_i = 1. \qquad (4.35)$$

Nos resta mostrar que todas as seqüências tem medida maior ou igual a zero de ocorrerem e teremos mostrado que $\tilde{\mathbb{P}}$ é de fato uma probabilidade, em outras palavras, temos que verificar que, para todo $T \subseteq [n]$,

$$\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in T} B_i \cap \bigcap_{i\notin T} \overline{B}_i) \geq 0. \qquad (4.36)$$

Por um lado temos que para todo $T \subseteq [n]$,

$$\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in T} B_i) = \sum_{\substack{S:\\ T\subseteq S\subseteq [n]}} \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} B_i \cap \bigcap_{i\notin S} \overline{B}_i), \qquad (4.37)$$

mas por definição

$$\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in T} B_i) = \sum_{\substack{S:\\ T\subseteq S\subseteq[n]}} P(S). \tag{4.38}$$

Pelo Princípio de Inclusão-Exclusão segue que

$$0 \le P(T) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in T} B_i \cap \bigcap_{i\notin T} \overline{B}_i) = \sum_{\substack{S:\\ T\subseteq S\subseteq[n]}} (-1)^{|S|-|T|}\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} B_i). \tag{4.39}$$

Assim, em particular,

$$P(\emptyset) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i) = Z_G(-\mathbf{p};\emptyset) = Z_G(-\mathbf{p}). \tag{4.40}$$

A última identidade esclarece o enunciado do teorema quanto à afirmação de que a cota inferior $Z_G(-\mathbf{p})$ é a melhor possível.

De fato, acabamos de construir um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \tilde{\mathbb{P}})$ e uma família de eventos $(B_i)_{i\in[n]}$ com $\tilde{\mathbb{P}}(B_i) = p_i$, tal que G é um grafo de dependência para a família e $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i) = Z_G(-\mathbf{p})$.

O teorema estará provado se conseguirmos mostrar que

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i) \ge \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i). \tag{4.41}$$

Como para todo $S \subseteq [n]$ temos que $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} \overline{B}_i) \ge \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i)$, a desigualdade (4.41) é óbvia se existe um conjunto $S \subseteq [n]$ tal que $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} \overline{B}_i) = 0$.

Consideramos então o caso interessante onde $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} \overline{B}_i) > 0$, para todo $S \subseteq [n]$.

Afirmação 1: A prova do teorema estará finalizada se provarmos que $S_1 \subseteq S_2$ implica que

$$\frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i\in S_1} \overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S_1} \overline{B}_i)} \le \frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i\in S_2} \overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S_2} \overline{B}_i)}. \tag{4.42}$$

De fato, se isto for verdade, então

$$1 = \frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i\in\emptyset} \overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in\emptyset} \overline{B}_i)} \le \frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i)}. \tag{4.43}$$

E ainda, é suficiente provar a Afirmação 1 para o caso onde $|S_2 - S_1| = 1$.

Para ver que basta provar para este caso suponha que este esteja provado e que $|S_2 - S_1| \geq 2$, se a desigualdade (4.42) é verdadeira quando $|S_2 - S_1| = 1$, então se $S_2 = S_1 \cup \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ temos

$$\frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i \in S_1} \overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i \in S_1} \overline{B}_i)} \leq \frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i \in S_1 \cup \{i_1\}} \overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i \in S_1 \cup \{i_1\}} \overline{B}_i)} \leq ... \leq \frac{\mathbb{P}(\bigcap_{i \in S_1 \cup \{i_1, i_2, ..., i_k\}} \overline{A}_i)}{\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i \in S_1 \cup \{i_1, i_2, ..., i_k\}} \overline{B}_i)}. \tag{4.44}$$

A prova da afirmação é por indução em $|S_2|$.

Caso 1: $|S_2| = 1$. Nesse caso,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i \in S_2} \overline{A}_i) = \mathbb{P}(\overline{A}_i) = 1 - p_i = \tilde{\mathbb{P}}(\overline{B}_i) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i \in S_2} \overline{B}_i). \tag{4.45}$$

Caso 2: Agora suponha que $|S_2| \geq 2$ e que a desigualdade (4.42) é verdadeira para qualquer subconjunto S_2' tal que $|S_2'| < |S_2|$.

Tome S_1 com $S_2 = S_1 \cup \{i\}$ e defina:

$$T_1 = \{j \in S_1 : \{i, j\} \notin E(G)\} \qquad \text{e} \qquad T_2 = \{j \in S_1 : \{i, j\} \in E(G)\}$$

Então $S_1 = T_1 \cup T_2$ e pelo Lema (4.1) temos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{j \in S_2} \overline{B}_j) &= \sum_{T \subseteq S_2} (-1)^{|T|} \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{j \in T} B_j) \\
&= \sum_{\substack{T \subseteq S_1 \cup \{i\} \\ T \in I(G)}} (-1)^{|T|} \prod_{j \in T} p_j \\
&= \sum_{\substack{T \subseteq S_1 \\ T \in I(G)}} (-1)^{|T|} \prod_{j \in T} p_j + \sum_{\substack{T \subseteq T_1 \cup \{i\} \\ T \in I(G) \\ i \in T}} (-1)^{|T|} \prod_{j \in T} p_j \\
&= \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{j \in S_1} \overline{B}_j) + (-p_i) \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{j \in T_1} \overline{B}_j).
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Para $\mathbb{P}(\bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j)$ temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{j \in S_2} \overline{A}_j) &= \mathbb{P}(\bigcap_{j \in S_1} \overline{A}_j) - \mathbb{P}(\bigcap_{j \in S_1} \overline{A}_j \cap A_i) \\
&\geq \mathbb{P}(\bigcap_{j \in S_1} \overline{A}_j) - \mathbb{P}(\bigcap_{j \in T_1} \overline{A}_j \cap A_i) \\
&= \mathbb{P}(\bigcap_{j \in S_1} \overline{A}_j) - p_i \mathbb{P}(\bigcap_{j \in T_1} \overline{A}_j),
\end{aligned} \tag{4.47}$$

onde a última identidade é conseqüência de G ser um grafo de dependência para $(A_j)_{j \in [n]}$.

Para simplificar a notação renomeamos $\mathbb{P}(\bigcap_{j\in S}\overline{A}_j) := \alpha(S)$ e $\tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{j\in S}\overline{B}_j) := B(S)$. Então, para concluir a prova basta mostrar que

$$\frac{\alpha(S_2)}{B(S_2)} \geq \frac{\alpha(S_1)}{B(S_1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha(S_2)}{B(S_2)} - \frac{\alpha(S_1)}{B(S_1)} \geq 0. \tag{4.48}$$

A desigualdade (4.47) e a igualdade (4.46) implicam, respectivamente, que

$$\alpha(S_2) \geq \alpha(S_1) - p_i\alpha(T_1) \;\text{ e }\; B(S_2) = B(S_1) - p_iB(T_1),$$

então,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha(S_2)}{B(S_2)} - \frac{\alpha(S_1)}{B(S_1)} &\geq \frac{\alpha(S_1) - p_i\alpha(T_1)}{B(S_1) - p_iB(T_1)} - \frac{\alpha(S_1)}{B(S_1)} \\
&= \frac{p_i(B(T_1)\alpha(S_1) - \alpha(T_1)B(S_1))}{(B(S_1) - p_iB(T_1))B(S_1)} \\
&= \frac{p_iB(T_1)}{B(S_1) - p_iB(T_1)}.\left(\frac{\alpha(S_1)}{B(S_1)} - \frac{\alpha(T_1)}{B(T_1)}\right) \geq 0. \qquad (4.49)
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem do fato que estamos no caso onde $B(T_1) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{j\in T_1}\overline{B}_j) > 0$ e por hipótese de indução, $\left(\frac{\alpha(S_1)}{B(S_1)} - \frac{\alpha(T_1)}{B(T_1)}\right) \geq 0$, pois $|S_1| < |S_2|$. □

Corolário 4.1. *Seja G um grafo de dependência para uma família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ com $\mathbb{P}(A_x) = p_x$. Suponha que $P(S) = (-1)^{|S|}Z_G(-\mathbf{p}; S) \geq 0$, para todo $S \subseteq X$ e que $Z_G(-\mathbf{p}; \emptyset) = Z_G(-\mathbf{p}) > 0$. Então, $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X}\overline{A}_x) > 0$.*

Prova: Imediata.

Corolário 4.2. *Seja G um grafo de dependência para uma família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ com $\mathbb{P}(A_x) = p_x$. Suponha que a série de Taylor de $\log Z_G(\mathbf{w})$ é absolutamente convergente para $|\mathbf{w}| \leq \mathbf{p}$. Então, $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X}\overline{A}_x) \geq Z_G(-\boldsymbol{p}) > 0$.*

Prova: Imediata se observamos as equivalências do Teorema 4.5 e o resultado de Shearer acima. Porém, como exibiremos um novo lema garantindo que a probabilidade $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X}\overline{A}_x)$ é positiva num polidisco que pode ser maior do que o estipulado pelo Lema de Lovász dependendo do grafo G (usando justamente a convergência da série do logaritmo e o critério de Fernández e Procacci que sobrepõe o de Dobrushin), apresentaremos a prova deste corolário usando diretamente o resultado de Shearer. De fato, isso é reescrever parte das equivalências do teorema de Scott e Sokal, e essa prova também é apresentada em [9].

Assim, para demonstrar este corolário considere, para cada $\emptyset \neq S \subset X$,

$$\begin{aligned}
P(S) &= \sum_{\substack{U:S\subseteq U\subseteq X\\ U\in I(G)}} (-1)^{|U|-|S|}\prod_{x\in U} p_x = \sum_{\substack{R\subseteq X\setminus(S\cup\Gamma_G(S))\\ R\in I(G)}} \prod_{x\in R}(-p_x)\prod_{y\in S} p_y \\
&= Z_G(-\boldsymbol{p}\mathbf{1}_{\mathbf{X}\setminus\mathbf{S}\cup\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})})\prod_{y\in S} p_y. \qquad (4.50)
\end{aligned}$$

Note que quando S não é independente, S é uma soma de zero parcelas e portanto nula.

A restrição de $Z_G(\mathbf{w})$ ao conjunto $K_{\boldsymbol{p}} = \prod_{x\in X}[-p_x, p_x]$ é uma função polinomial real e portanto contínua e positiva em $K_{\boldsymbol{p}}^+ = \prod_{x\in X}[0, p_x]$.

Como $\log Z_G(\mathbf{w})$ é absolutamente convergente no polidisco $|w_x| \leq p_x$, a função partição $Z_G(\mathbf{w})$ não tem zeros no mesmo polidisco $|w_x| \leq p_x$ e portanto $Z_G(\mathbf{w})$ não possui zeros em $K_{\boldsymbol{p}} = \prod_{x\in X}[-p_x, p_x]$.

Disso concluímos que $Z_G(\boldsymbol{w})$ é positiva em todo ponto de $K_{\boldsymbol{p}}$ pois, como nunca se anula e é contínua e definida em um conexo, se assumisse também valores negativos, obrigatoriamente se anularia em algum ponto de $K_{\boldsymbol{p}}$.

Em particular $P(\emptyset) = Z_G(-\boldsymbol{p}) > 0$ e ainda, como para todo $S \subset X$ temos que o conjunto $K_{\boldsymbol{p}^{S^c}} = \prod_{x\in X}[-p_x^{S^c}, p_x^{S^c}]$ está contido em $K_{\boldsymbol{p}}$, onde $\boldsymbol{p}^{S^c} = \{p_x^{S^c}\}_{x\in X}$ e

$$p_x^{S^c} = (p.1_{X\setminus S\cup\Gamma_G(S)})_x = \begin{cases} 0 & x \in S \cup \Gamma_G(S) \\ p_x & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{4.51}$$

temos que $Z_G(\boldsymbol{w})$ é também positiva em $K_{\boldsymbol{p}^{S^c}}$ e então $Z_G(-\boldsymbol{p}\mathbf{1}_{\mathbf{X}\setminus\mathbf{S}\cup\mathbf{\Gamma_G(S)}}) \geq 0$.

Disto e da identidade (4.50) concluímos que $P(S) \geq 0$ para qualquer $S \subseteq X$ e $P(\emptyset) = Z_G(-\boldsymbol{p}) > 0$. O resultado segue do teorema de Shearer. $\square$

Agora podemos provar o resultado fundamental obtido por Shearer que mostra que obter condições onde a conclusão do Lema de Lovász é válida é *equivalente* a obter condições para que a função partição (polinômio de conjuntos independentes) não se anule. Isso reduz o problema a conseguir o maior polidisco possível onde o logaritmo da função partição do gás de rede com interação do tipo caroço duro seja uma função analítica pelo Teorema 4.5. A prova de que é suficiente a analiticidade do logaritmo acabamos de dar na proposição acima.

É importante ressaltar que o Lema de Lovász não é equivalente a nenhum critério específico para a convergência, mas sim à convergência da série do logaritmo em si. Isso revela que da mesma forma que apresentamos na sessão seguinte uma melhora do lema usando o novo critério de Fernández e Procacci, eventuais novos critérios que surjam obrigatoriamente irão melhorar a região onde o Lema de Lovász é eficiente.

Teorema 4.7. *Pode-se aplicar o Lema Local de Lovász de modo a garantir que a probabilidade do evento $\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i$ é positiva, onde $(A_i)_{i\in[n]}$ é uma família* arbitrária *de eventos com $\mathbb{P}(A_i) = p_i$ e grafo de dependência G se, e somente se, $Z_G(-\mathbf{p}) > 0$ e $P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{p}; S) \geq 0$, para todo $S \subseteq [n]$.*

Prova: A prova da ida faremos por contraposição.

Se $Z_G(-\mathbf{p}) = 0$ e $P(S) \geq 0$ para qualquer $S \subseteq [n]$, então é fácil ver que o lema de Lovász não é eficiente pois, pelo Teorema de Shearer 4.6, é possível construir uma família de eventos cujo grafo de dependência é G, onde os eventos tem probabilidades $(p_i)_{i\in[n]}$ mas que $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i) = P(\emptyset) = Z_G(-\mathbf{p}) = 0$.

Suponhamos agora que não seja verdade que $P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{p}; S) \geq 0$, para todo $S \subseteq [n]$. Pelo Teorema 4.5 item (7), temos que $\mathbf{p} \notin R(G)$ e lembrando que $R(G)$ é um aberto conexo $[0,\infty)^n$ contendo o vetor nulo, segue do Teorema da Alfândega que qualquer caminho contínuo que tomarmos ligando $\mathbf{p}$ ao vetor nulo $\mathbf{0}$ certamente interceptará a fronteira de $R(G)$ em $[0,\infty)^n$. Portanto, existe um vetor $\mathbf{p}' \leq \mathbf{p}$ com $\mathbf{p}' \in \partial R(G)$ em $[0,\infty)^n$ e então, pela Proposição 4.1, segue que $Z_G(-\mathbf{p}') = 0$.

Temos que $P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{p}'; S) \geq 0$ para todo $S \subseteq [n]$, pois $\mathbf{p}' \in \partial R(G)$ e, para cada S fixado a função que associa $\mathbf{q}$ ao número $(-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{q}; S)$ é contínua e não negativa em $R(G)$, portanto não negativa também na fronteira $\partial R(G)$.

Sabemos então, pelo Teorema 4.6, que é possível construir uma família de eventos $(B_i)_{i\in[n]}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \tilde{\mathbb{P}})$ com $\tilde{\mathbb{P}}(B_i) = p'_i$, tal que G é um grafo de dependência para a família $(B_i)_{i\in[n]}$ com $Z_G(-\mathbf{p}') = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i) = 0$.

Construiremos um espaço de probabilidade e uma família de eventos $(A_i)_{i\in[n]}$ com $\mathbb{P}(A_i) = p_i$ tal que G é um grafo de dependência para a família e $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i) = 0$. O caso trivial é quando algum dos p'_i é 1 pois $p'_i \leq p_i$ e portanto, $\mathbb{P}(\overline{A}_i) = 0$, assim qualquer família $(A_i)_{i\in[n]}$ com $\mathbb{P}(A_i) = p_i$ satisfaz $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i) = 0$.

Assim vamos considerar o caso onde $p'_i < 1$, para todo $i \in [n]$.

Como no Teorema 4.6 consideramos o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ onde $\Omega = \{0,1\}^n$ é o conjunto das seqüências de zeros e uns e, $\mathcal{P}(\Omega)$ é o conjunto das partes de Ω.

Tome a família dos cilindros $(B_i)_{i\in[n]}$, onde $B_i = \{(a_1, ..., a_n) \in \Omega : a_i = 1\}$ e a medida $\tilde{\mathbb{P}}$ construída no teorema.

Considere o espaço produto $(\Omega \times \Omega, \mathcal{P}(\Omega \times \Omega), \mathbb{P})$ com $\mathbb{P}$ definida por

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in S} B_i \times \bigcap_{j\in T} C_j) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in S} B_i) \prod_{j\in T} \frac{p_j - p'_j}{1 - p'_j}, \tag{4.52}$$

onde, fazendo a identificação natural de $\Omega \times \Omega$ com $\{0,1\}^{2n}$, para quaisquer $S, T \subseteq [n]$ e $i \in [n]$:

$$C_i := \{(a_1, ..., a_{2n}) \in \Omega \times \Omega : a_{i+n} = 1\}$$

$$\bigcap_{i\in S} B_i \times \bigcap_{j\in T} C_j := \{(a_1, ..., a_{2n}) \in \Omega \times \Omega : a_i = 1 \text{ quando } i \in S \cup (n+T)\}$$

$$B_i := \{(a_1, ..., a_{2n}) \in \Omega \times \Omega : a_i = 1\}$$

Assim $(C_i)_{i\in[n]}$ é uma família independente de eventos e, definindo $A_i = B_i \cup C_i$ para cada $i \in [n]$, segue que G é um grafo de dependência para a família $(A_i)_{i\in[n]}$ e ainda:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i) &= \mathbb{P}(B_i \cup C_i) = \mathbb{P}(B_i) + \mathbb{P}(C_i) - \mathbb{P}(B_i \cap C_i) \\ &= p_i' + \frac{p_i - p_i'}{1 - p_i'} - p_i'.\frac{p_j - p_i'}{1 - p_i'} = p_i' + \frac{(1 - p_i')(p_j - p_i')}{1 - p_i'} = p_i. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Concluímos então que G é um grafo de dependência para a família $(A_i)_{i\in[n]}$ com $\mathbb{P}(A_i) = p_i$ e

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i) = \mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B_i \cup C_i}) = \mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B_i} \cap \bigcap_{i\in[n]} \overline{C_i}) \leq \mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i) = \tilde{\mathbb{P}}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{B}_i) = 0. \tag{4.54}$$

A volta segue diretamente do Corolário 4.1.

□

4.3 A relação entre as cotas inferiores para $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i)$

Suponhamos que esteja fixado o grafo G e consideramos famílias $(A_i)_{i\in[n]}$ de eventos em espaços de probabilidade tais que G é um grafo de dependência para estas.

O Lema Local de Lovász, Teorema 4.2, nos fornece um polidisco (definido pela condição de Dobrushin) no qual é possível obter a cota inferior para $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i)$, a saber:

Se existem $(r_x)_{x\in X}$ números em $[0, 1)$ tais que, para cada x,

$$\mathbb{P}(A_x) = p_x \leq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)} (1 - r_y). \tag{4.55}$$

Então $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq \prod_{x\in X}(1 - r_x) > 0.$

A maneira de Shearer garantir que $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]} \overline{A}_i)$ é positiva é a mesma, é produzida uma cota inferior para a probabilidade, esta cota inferior por hipótese é positiva e o Lema de Lovász está provado. A diferença na abordagem de Shearer é que não é estipulado um poli-raio, exige-se que $P(S) = (-1)^{|S|} Z_G(-\mathbf{p}; S) \geq 0$ para todo $S \subseteq X$ e que $Z_G(-\mathbf{p}) > 0$, nestas hipóteses $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) = P(\emptyset) > 0$.

Como vimos no Teorema 4.5 as hipóteses exigidas por Shearer são equivalentes à analiticidade da função $\log Z_G(\mathbf{w})$ no polidisco $|\mathbf{w}| \leq \mathbf{p}$. Então agora basta lembrarmos que no polidisco definido pela condição (4.55) a função $\log Z_G(\mathbf{w})$ é analítica (Teorema 2.39), ou seja, se vale (4.55) então pelo Teorema de Shearer também temos que $\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X}\overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) = P(\emptyset) > 0$.

Assim concluímos que se $p_x \leq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)}(1-r_y)$ para todo $x \in X$, então são válidas as desigualdades:

$$\mathbb{P}(\textstyle\bigcap_{x\in X}\overline{A}_x) \geq \prod_{x\in X}(1-r_x) > 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\bigcap_{x\in X}\overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) > 0.$$

De fato, temos:

Proposição 4.2. *Seja $(A_i)_{i\in[n]}$ uma família de eventos com $\mathbb{P}(A_i) = p_i$ e grafo de dependência G. Se $p_i \leq r_i \prod_{j\in\Gamma(i)}(1-r_j)$ para qualquer $i \in [n]$ então*

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]}\overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) \geq \prod_{i\in[n]}(1-r_i) > 0 \tag{4.56}$$

Prova: Faremos duas demonstrações destas desigualdades, a primeira prova é obtida observando que na prova do Teorema 4.6 construímos uma família de eventos $(B_i)_{i\in[n]}$ com $\mathbb{P}(B_i) = p_i$ tal que G é um grafo de dependência para esta e ainda $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in[n]}\overline{B}_i) = Z_G(-\mathbf{p})$. Agora, aplicando o Lema Local de Lovász na família $(B_i)_{i\in[n]}$ obtemos $Z_G(-\mathbf{p}) \geq \prod_{i\in[n]}(1-r_i) > 0$. A primeira desigualdade segue diretamente do fato de o polidisco proveniente da condição de Dobrushin estar contido na região onde valem as hipóteses do Teorema 4.6.

A segunda demonstração segue diretamente do Critério de Dobrushin e é desta maneira que procederemos na seção seguinte, mas lá usando o Critério de Fernández-Procacci.

4.4 Um Novo Lema

Como antes, em toda esta seção X denotará um conjunto finito e G um grafo tal que $V(G) = X$.

Lembrando a Seção 1.5.2, no gás de rede os polímeros são os vértices do grafo, e os elos determinam quem são os vértices incompatíveis, sendo cada vértice incompatível com ele mesmo e dois vértices distintos incompatíveis se, e somente se, existe um elo entre eles.

Seguindo a notação dos capítulos iniciais, para cada $x \in X$ definimos a partição restrita aos vizinhos de x por:

$$\varphi_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\mu}) = \Xi_x(\boldsymbol{\mu}) = Z_{\Gamma^*(x)}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{\substack{T\subset\Gamma^*_G(x)\\ T\in I(G)}} \prod_{x\in T}\mu_x$$

e a seguinte função auxiliar:

$$\tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{\substack{T\subset\Gamma_G(x)\\ T\in I(G)}} \prod_{x\in T}\mu_x. \tag{4.57}$$

Reescreveremos as séries usadas para obter os critérios de convergência no caso do gás de polímeros abstratos para este caso específico do gás de rede. (1.4),(1.5) e (1.6) se tornam, respectivamente:

$$-\log Z_G(-\boldsymbol{\rho}) = |\log Z_G|(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X^n} |\phi^T(x_1,...,x_n)|\rho_{x_1}\cdots\rho_{x_n}$$

$$|\Sigma|_x(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\in X^n \\ \exists i: x_i = x}} |\phi^T(x_1,...,x_n)|\rho_{x_1}\cdots\rho_{x_n}$$

$$|\Pi|_x(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in X^n} |\phi^T(x,x_1,...,x_n)|\rho_{x_1}\cdots\rho_{x_n}.$$

E, é claro, para cada $x \in X$ novamente teremos:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial\rho_x}\log Z_G(-\boldsymbol{\rho}) = |\Pi|_x(\boldsymbol{\rho}) \\ -\log Z_G(-\boldsymbol{\rho}) + \log Z_{G\setminus\{x\}}(-\boldsymbol{\rho}) \;=\; |\Sigma|_x(\boldsymbol{\rho}). \end{aligned} \tag{4.58}$$

Portanto,

$$|\Sigma|_x(\boldsymbol{\rho}) \;=\; \rho_x \int_0^1 |\Pi|_x(\boldsymbol{\rho}(\alpha)) \tag{4.59}$$

onde

$$\rho_y(\alpha) = \begin{cases} \rho_y, & \text{se} \quad y \neq x \\ \alpha\rho_y, & \text{se} \quad y = x. \end{cases}$$

Estamos considerando $0 < \boldsymbol{\rho} = \{\rho_x\}_{x\in X}$. Então, por (4.58), no polidisco $\{|w_x| \leq \rho_x\}_{x\in X}$ temos:

$$-\log Z_G(-|\boldsymbol{w}|) \leq -\log Z_G(-\boldsymbol{\rho}) \leq \sum_{x\in X} |\Sigma|_x(\boldsymbol{\rho}) \tag{4.60}$$

Conhecidos os teoremas de Shearer e o novo critério de convergência de Fernández-Procacci é de se esperar que exista um teorema estilo Lema de Lovász que corresponde a este novo critério.

A versão do Lema de Lovász que apresentamos anteriormente, Teorema 4.2, que é devida a Spencer e é a mais popular nos dias de hoje, não só nos fornece uma região onde existe a garantia da probabilidade de nenhum dos eventos ocorrerem ser estritamente positiva, mas também nos dá uma cota inferior para esta, como vimos na seção anterior.

Antes de apresentarmos a versão do Lema de Lovász que corresponde ao critério de Fernández-Procacci, provaremos um lema que nos dará uma cota inferior para a probabilidade neste caso.

Como a atividade $0 < \boldsymbol{\rho} = \{\rho_x\}_{x \in X}$ fará o papel das probabilidades e estamos interessados na probabilidade de nenhum dos eventos ocorrerem, suporemos no próximo lema que para todo $x \in X$:

$$0 < \rho_x < 1$$

Lema 4.2. *Suponhamos que existam $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_x\}_{x \in X}$ números reais em $[0, +\infty)$ tais que, para cada x:*

$$\rho_x \leq R_x^{\mathrm{FP}} = \frac{\mu_x}{\varphi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})}. \tag{4.61}$$

Então, no polidisco $\{|w_x| \leq \rho_x\}_{x \in X}$, temos

$$Z_G(-|\boldsymbol{w}|) \ \geq \ \prod_{x \in X} (1 - \rho_x)^{\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})}, \tag{4.62}$$

onde $\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})$ é a função dada em 4.57 que não depende de μ_x e satisfaz

$$\varphi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu}) = \mu_x + \tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu}).$$

Prova: Para cada $x \in X$, retomamos a série $\rho_x \Pi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\rho})$ definida em (1.21), que é o ponto fixo do critério de Fernández-Procacci, conforme foi mostrado na Proposição 1.1. De fato, o que concluímos desta proposição é que se $\boldsymbol{\rho\Pi}^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\rho}) = \{\rho_x \Pi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\rho})\}_{x \in X}$ e $\varphi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu}) = \{\varphi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})\}_{x \in X}$, então $\boldsymbol{\rho\Pi}^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\rho})$ é um ponto fixo da aplicação

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{\rho}} \equiv \{T_x^{\boldsymbol{\rho}}\}_x : [0, \infty)^X \quad &\longrightarrow \quad [0, \infty)^X \\ T_x^{\boldsymbol{\rho}}(\cdot) \quad &= \quad \rho_x \varphi_x^{\mathrm{FP}}(\cdot), \end{aligned} \tag{4.63}$$

isto é,

$$\rho_x \Pi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\rho}) = T_x^{\boldsymbol{\rho}}\Big(\boldsymbol{\rho\Pi}^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\rho})\Big). \tag{4.64}$$

Como o Teorema 1.3 nos garante que se $\rho_x \leq R_x^{\mathrm{FP}} = \frac{\mu_x}{\varphi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})}$ então,

$$\rho_x |\Pi|_x(\boldsymbol{\rho}) \ \leq \ \rho_x \Pi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\rho}) \ \leq \ \mu_x, \tag{4.65}$$

conseqüentemente, as séries $|\Pi|_x(\boldsymbol{\rho})$ e $\Pi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\rho})$ convergem.

Agora observamos o seguinte: sendo $\rho_x \Pi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\rho})$ ponto fixo, segue que

$$\rho_x \Pi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\rho}) = \rho_x \varphi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\rho\Pi}^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\rho})).$$

Usando a monotonicidade da função $\tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\mu})$ em relação à $\boldsymbol{\mu}$ e a desigualdade (4.65) temos

$$\begin{aligned}\Pi_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\rho}) &= \varphi_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\Pi}^{\text{FP}}(\boldsymbol{\rho})) = \rho_x \Pi_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\rho}) + \tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\Pi}^{\text{FP}}(\boldsymbol{\rho})) \\ &\leq \rho_x \Pi_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\rho}) + \tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\mu}). \end{aligned} \tag{4.66}$$

Então, como para todo $x \in X$ temos que $|\Pi|_x(\boldsymbol{\rho}) \leq \Pi_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\rho})$ e $0 < \rho_x < 1$, de (4.66) obtemos

$$|\Pi|_x(\boldsymbol{\rho}) \;\leq\; \frac{\tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\mu})}{1-\rho_x}.$$

Integrando e usando a identidade (4.59) segue que

$$|\Sigma|_x(\boldsymbol{\rho}) = \rho_x \int_0^1 |\Pi|_x(\boldsymbol{\rho}(\alpha)) \leq \rho_x \int_0^1 \frac{\tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\mu})}{1-\alpha\rho_x} d\alpha \;=\; -\log\left[1-\rho_x\right]^{\tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\mu})} \tag{4.67}$$

Somando a desigualdade (4.67) em X,

$$\sum_{x\in X} |\Sigma|_x(\boldsymbol{\rho}) \leq -\log\left[\prod_{x\in X}\left[1-\rho_x\right]^{\tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\mu})}\right].$$

De (4.60), obtemos que se $\rho_x \leq R_x^{\text{FP}}$, então,

$$\log Z_G(-|\boldsymbol{w}|) \geq \log Z_G(-\boldsymbol{\rho}) \geq -\sum_{x\in X} |\Sigma|_x(\boldsymbol{\rho}) \geq \log\left[\prod_{x\in X}\left[1-\rho_x\right]^{\tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\mu})}\right],$$

donde concluímos

$$Z_G(-|\boldsymbol{w}|) \geq Z_G(-\boldsymbol{\rho}) \geq \prod_{x\in X}\left[1-\rho_x\right]^{\tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\mu})}.$$

□

Agora podemos enunciar o principal resultado deste capítulo:

Teorema 4.8. *Suponha que G é um grafo de dependência para a família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e que existem $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_x\}_{x\in X}$ números reais em $[0, +\infty)$ tais que, para cada $x \in X$, $\mathbb{P}(A_x) = p_x$ satisfaz:*

$$p_x \leq R_x^{\text{FP}} \equiv \frac{\mu_x}{\varphi_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\mu})} = \frac{\mu_x}{Z_{\Gamma^*(x)}(\boldsymbol{\mu})}. \tag{4.68}$$

Então,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x\Big) \geq Z_G(-\mathbf{p}) \;\geq\; \prod_{x\in X}(1-p_x)^{\tilde{\varphi}_x^{\text{FP}}(\boldsymbol{\mu})} \;>\; 0.$$

Prova: Conseqüência da combinação dos seguintes resultados: Teorema de Shearer 4.6; do Corolário 4.2, ou melhor, da prova deste corolário o qual mostra que a analiticidade do logaritmo da função partição implica nas hipóteses do teorema de Shearer; do critério de Fernández-Procacci 1.3 e do lema anterior. $\square$

Comparação entre as cotas inferiores:

Assim como no lema Lovász usual, onde mostramos que dentro do polidisco proveniente do Critério de Dobrushin $(R_x^D)_{x\in X}$, tínhamos a desigualdade $Z_G(-\mathbf{p}) \geq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)}(1-r_y)$ e esta cota inferior era válida se $p_x \leq r_x \prod_{y\in\Gamma(x)}(1-r_y)$. Neste novo lema obtemos uma região maior onde a probabilidade de nenhum dos eventos ocorrer é positiva e a cota inferior obtida é $\prod_{x\in X}(1-p_x)^{\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})}$.

Nossa nova cota será melhor do que a do Lema de Lovász usual se para cada $x \in X$ tivermos:

$$1 - r_x \;=\; \frac{1}{1+\mu_x} \;\leq\; (1-p_x)^{\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})}$$

ou seja,

$$p_x \;\leq\; \overline{R}_x \;\equiv\; 1 - \left(\frac{1}{1+\mu_x}\right)^{1/\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})}$$

Lema 4.3. *Para os poli-raios dos polidiscos onde o Lema de Lovász é eficiente (o usual e a nova versão) valem as seguintes desigualdades:*

$$R_x^{\mathrm{FP}} \;\geq\; \overline{R}_x \;\geq\; \tilde{R}_x^{\mathrm{FP}} \;\equiv\; \frac{\mu_x}{(1+\mu_x)\,\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})} \;\geq\; R_x^{\mathrm{D}} \tag{4.69}$$

Prova: Lembremos que pela desigualdade de Bernoulli sabemos que $(1+a)^b \leq 1+ab$ se $a \geq -1$ e $0 \leq b \leq 1$. Fazendo $a = r_x$ e $b = 1/\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})$ obtemos

$$\left(\frac{1}{1+\mu_x}\right)^{1/\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})} = (1-r_x)^{1/\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})} \leq 1 - \frac{r_x}{\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})} \tag{4.70}$$

donde

$$\overline{R}_x = 1 - \left(\frac{1}{1+\mu_x}\right)^{1/\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})} = 1 - (1-r_x)^{1/\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})} \geq \frac{r_x}{\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})} = \tilde{R}_x^{\mathrm{FP}} \tag{4.71}$$

Como $(1+\mu_x)\,\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu}) \leq \varphi_x^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{\mu})$ temos que $\tilde{R}_x^{\mathrm{FP}} \geq R_x^{\mathrm{D}}$. $\square$

Vale a pena ressaltar que todas as desigualdades são estritas, menos no caso onde $\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu}) = 1$, ou seja, $\mu_y = 0$ para todo $y \in \Gamma_G(x)$.

A conclusão é que melhoramos a cota inferior da probabilidade dentro do polidisco original de Dobrushin $\{p_x \leq R_x^{\mathrm{D}}\}$ e ainda numa região um pouco maior $\{p_x \leq \overline{R}_x\}$.

Igualmente como no caso do Lema de Lovász usual, o seguinte resultado é imediato:

Teorema 4.9. *Suponha que G é um grafo de dependência assimétrico para a família de eventos $(A_x)_{x\in X}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e que existem $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_x\}_{x\in X}$ números reais em $[0, +\infty)$ tais que, para cada $x \in X$ temos que $\mathbb{P}(A_x) = p_x$ satisfaz:*

$$p_x \leq R_x^{\mathrm{FP}} \equiv \frac{\mu_x}{\varphi_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})} = \frac{\mu_x}{Z_{\Gamma^*(x)}(\boldsymbol{\mu})}. \tag{4.72}$$

Então,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{x\in X} \overline{A}_x) \geq Z_G(-\mathbf{p}) \;\geq\; \prod_{x\in X} (1-p_x)^{\tilde{\varphi}_x^{\mathrm{FP}}(\boldsymbol{\mu})} \;>\; 0. \tag{4.73}$$

O Lema local de Lovász é usado em centenas de artigos de combinatória, Teoria dos Grafos e outras áreas, a seguir aplicamos nossa versão em alguns exemplos para mostrar a melhora nas estimativas em relação a versão usual do lema. O capítulo 5 inteiro de [3] pode ser reescrito com esta nova versão do lema, apresentamos apenas alguns.

4.5 Aplicações

Apresentamos agora alguns resultados onde usamos nossa nova versão do Lema de Lovász comparando com os resultados obtidos usando o Lema de Lovász usual.

Proposição 4.3. *Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que seus vértices tem grau máximo Δ e seja $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$ uma partição do conjunto dos vértices V em n conjuntos dois a dois disjuntos. Suponhamos ainda que para cada conjunto V_i tenhamos $|V_i| \geq 4\Delta$. Então existe um conjunto independente $W \subseteq V$ de cardinalidade n que contém exatamente um vértice de cada V_i.*

Prova: Sem perda de generalidade podemos assumir que para cada conjunto V_i temos $|V_i| = k$, onde k é a menor dentre as cardinalidades dos conjuntos V_i, $1 \leq i \leq n$. O caso geral segue deste usando o grafo induzido por G em uma união de n subconjuntos de cardinalidade k, cada um deles subconjunto de um dos V_i.

Escolhemos um conjunto W de n vértices como segue: em cada conjunto V_i escolhemos, aleatoriamente e independentemente, um único vértice de acordo com a distribuição uniforme, isto é, em cada V_i a probabilidade de um vértice ser escolhido é $1/k$.

Para cada elo $ab \in E$, seja W_{ab} o evento "W contém ambos os vértices a e b". Então $\mathbb{P}(W_{ab}) = 0$, se a e b são elementos do mesmo V_i e $\mathbb{P}(W_{ab}) = 1/k^2 = p$, se $a \in V_i$ e $b \in V_j$, com $i \neq j$. Note que, se os vértices a e b pertencem a $V_i \cup V_j$ temos que o evento W_{ab} é mutuamente independente da família de eventos composta por todos os outros eventos W_{cd} tais que nem c e nem d pertencem a $V_i \cup V_j$.

Assim, existe um grafo de dependência $H = ((W_{ab})_{ab \in E(G)}, E(H))$ para a família de eventos $(W_{ab})_{ab \in E(G)}$ com grau máximo menor ou igual a $2k\Delta$. Podemos tomar H sendo o grafo de dependência para a família $(W_{ab})_{ab \in E(G)}$ com menor número de elos possível, ou seja, existirá um elo de H entre dois eventos W_{ab} e W_{cd} se, e somente se, W_{ab} e W_{cd} forem dependentes.

Seja $\{a, b\} \subset V_i \cup V_j$. Pela definição do grafo H temos que se $W_{cd} \in \Gamma_H(W_{ab})$, então $c \in V_i \cup V_j$ ou $d \in V_i \cup V_j$, donde segue que $|\Gamma_H(W_{ab})| \leq 2k\Delta$. O valor $2k\Delta$ é obtido observando que cada vértice de V_i está ligado a no máximo Δ vértices de G e que V_i possui k vértices, isso totaliza $k\Delta$ elos incidentes em algum elemento de V_i. O mesmo é válido para V_j totalizando $2k\Delta$, podendo alguns elos de G terem sido contados duas vezes.

Para aplicar o Teorema 4.8 usando o grafo de dependência H temos que calcular ou pelo menos dar uma cota superior para $Z_{\Gamma_H^*}(W_{ab})$, onde ab é um elo arbitrário de G.

Em vista disso, precisamos de uma cota superior para o número de pares de eventos $\{W_{cd}, W_{fg}\}$ independentes em H que sejam adjacentes a W_{ab}. Claramente o número de pares não excede $k^2\Delta^2$, pois temos no máximo $k\Delta$ eventos W_{cd} adjacentes a W_{ab} tais que ou c ou d não pertence a $V_i \cup V_j$.

Não existem trincas $\{W_{cd}, W_{ef}, W_{gh}\}$ de eventos adjacentes a W_{ab} e independentes dois a dois em H. De fato, se $\{a, b\} \subset V_i \cup V_j$ já vimos que se $W_{cd} \in \Gamma_H(W_{ab})$, então $c \in V_i \cup V_j$ ou $d \in V_i \cup V_j$, o mesmo vale para W_{ef} e W_{gh}. Assim, cada um dos eventos do conjunto $\{W_{cd}, W_{ef}, W_{gh}\}$ deveria satisfazer as seguintes condições simultaneamente: cada um dos seus índices (elos de G) deveria ter pelo menos um vértice em $V_i \cup V_j$ e os eventos deveriam ser independentes dois a dois, o que é impossível. Assim:

$$Z_{\Gamma_H^*}(W_{ab}) \leq 1 + 2k\Delta\mu + k^2\Delta^2\mu^2$$

e, para aplicar o Teorema 4.8 usando o grafo de dependência H, observamos que

$$f(\mu) = \frac{\mu}{Z_{\Gamma_H^*}(W_{ab})} \geq \frac{\mu}{1 + 2k\Delta\mu + k^2\Delta^2\mu^2},$$

onde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{ab})_{ab \in E(G)}$ é tal que $\mu_{ab} = \mu > 0$ para todo $ab \in E(G)$.

Como o lado direito da desigualdade acima assume seu valor máximo em $\mu_0 = \frac{1}{k\Delta}$, pelo Teorema 4.8, se $p \leq 1/4k\Delta \leq f(\mu_0)$ então a probabilidade de nenhum dos eventos da família $(W_{ab})_{ab \in E(G)}$ ocorrer é positiva. Em particular, com probabilidade positiva nosso conjunto aleatório W é um conjunto independente de vértices de G contendo exatamente um vértice de cada V_i.

Isso conclui a prova, pois $p = 1/k^2$ e então $p \leq 1/4k\Delta$ se, e somente se, $k \geq 4\Delta$. $\square$

Se usássemos o Lema de Lovász original precisaríamos exigir que $|V_i| \geq 2e\Delta$ ao invés de $|V_i| \geq 4\Delta$, ver [3] pág. 70. Esse exemplo serve para ilustrar a melhora do lema usando o novo critério de Fernández-Procacci, no entanto, utilizando outras técnicas e não o Lema de Lovász é possível mostrar que a Proposição 4.3 é válida ainda com 2Δ no lugar de 4Δ, sendo este o menor valor possível, ver [44].

Exemplo: Marcamos $k.n$ pontos coloridos com n cores ao longo de um círculo, k pontos de cada cor. Se $k \geq 8$ então existe um conjunto de n pontos que não são vizinhos no círculo contendo exatamente um ponto de cada cor.

Prova: Segue imediatamente da Proposição (4.3), pra ver isto basta definir que dois pontos são adjacentes em G quando são vizinhos no círculo. $\square$

Usando a versão standard do Lema é preciso exigir $k \geq 11$ para o mesmo exemplo.

Proposição 4.4. *Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que seus vértices tem grau máximo Δ e seja $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n$ uma partição do conjunto dos vértices V em n conjuntos dois a dois disjuntos. Suponhamos ainda que para cada conjunto V_i tenhamos $|V_i| \geq \frac{9\Delta}{\sqrt{8}}$. Então existe um conjunto de vértices $W \subseteq V$ de cardinalidade n que contém exatamente um vértice de cada V_i cujo o grau máximo do grafo induzido $\langle W \rangle$ é 1. Ou seja, $\langle W \rangle$ é formado por vértices isolados e elos independentes.*

Prova: A prova é muito semelhante à da proposição anterior. Assumimos que cada conjunto V_i tem cardinalidade k, onde k é a menor dentre as cardinalidades dos conjuntos V_i, $1 \leq i \leq n$.

Escolhemos um conjunto W de n vértices, um de cada conjunto V_i, aleatoriamente e independentemente segundo a distribuição uniforme em cada V_i.

Seja T o conjunto de trincas de vértices $t = \{a, b, c\}$ de G tais que o grafo induzido $\langle t \rangle$ contém pelo menos dois elos de G. Para cada $t \in T$ consideramos W_t o evento "W contém todos os vértices de t".

Assim, $\mathbb{P}(W_t) = p = 1/k^3$, se todos os três vértices de t pertencem a diferentes V_i e $\mathbb{P}(W_t) = 0$, caso contrário. Se $a \in V_i$, $b \in V_j$ e $c \in V_k$, então o evento W_t é mutuamente independente da família de eventos composta por todos os outros eventos $W_{t'}$ tais que todos os vértices de $t' = \{a', b', c'\}$ não pertencem a $V_i \cup V_j \cup V_k$.

Então, existe um grafo de dependência $H = ((W_t)_{t \in T}, E(H))$ para a família de eventos $(W_t)_{t \in T}$ com grau máximo menor ou igual a $\frac{9k\Delta^2}{2}$. Podemos tomar H sendo o grafo de dependência para a família $(W_t)_{t\in T}$ com menor número de elos possível, ou seja, existirá um elo de H entre dois eventos W_t e $W_{t'}$ se, e somente se, W_t e $W_{t'}$ forem dependentes.

Seja $t = \{a, b, c\} \subset V_i \cup V_j \cup V_k$. Pela definição do grafo H temos que se $W_{t'} \in \Gamma_H(W_t)$ então $a' \in V_i \cup V_j \cup V_k$ ou $b' \in V_i \cup V_j \cup V_k$ ou $c' \in V_i \cup V_j \cup V_k$, disto segue que $|\Gamma_H(W_t)| \leq \frac{9k\Delta^2}{2}$. O valor $\frac{9k\Delta^2}{2}$ é obtido observando que cada vértice de V_i está ligado a no máximo Δ vértices de G e que V_i possui k vértices. Isso totaliza $k\Delta$ elos incidentes em algum elemento de V_i, cada elo destes é adjacente a no máximo $(\Delta - 1)$ outros elos em cada um de seus vértices, resultando no máximo de $\frac{3k\Delta^2}{2}$ elementos $t' \in T$ tais que $W_{t'} \in \Gamma^*_H(W_t)$ e t' possui pelo menos um vértice em V_i. O mesmo é válido para V_j e V_k, donde segue que $|\Gamma^*_H(W_t)| \leq \frac{9k\Delta^2}{2}$. Na verdade, pode-se afirmar que $|\Gamma^*_H(W_t)| \leq \frac{9k\Delta.(\Delta-1)}{2}$ mas usaremos a cota mais grosseira.

Para aplicar o teorema 4.8 usando o grafo de dependência H temos que calcular, ou pelo menos dar uma cota superior para $Z_{\Gamma^*_H}(W_t)$, onde $t \in T$.

Fazendo uma análise parecida com a da proposição anterior temos que:

$$Z_{\Gamma^*_H}(W_t) \leq 1 + \frac{9}{2}k\Delta^2\mu + 3\left(\frac{3}{2}k\Delta^2\right)^2\mu^2 + \left(\frac{3}{2}k\Delta^2\right)^3\mu^3 = \left(1 + \frac{3}{2}k\Delta^2\mu\right)^3 \tag{4.74}$$

e, portanto,

$$f(\mu) = \frac{\mu}{Z_{\Gamma^*_H}(W_t)} \geq \frac{\mu}{\left(1 + \frac{3}{2}k\Delta^2\mu\right)^3}, \tag{4.75}$$

onde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_t)_{t\in T}$ é tal que $\mu_t = \mu > 0$, para todo $t \in T$.

Derivando e igualando a zero a expressão do lado direito da desigualdade acima, o valor para o qual a expressão assume seu valor máximo é $\mu_0 = \frac{1}{3k\Delta^2}$.

Pelo Teorema 4.8, se $p \leq \frac{8}{81k\Delta^2} \leq f(\mu_0)$ então a probabilidade de nenhum dos eventos da família $(W_t)_{t\in T}$ ocorrer é positiva. Em particular, com probabilidade positiva, nosso conjunto aleatório W é tal que $\langle W\rangle$ é formado por vértices isolados e elos independentes contendo um vértice de cada V_i.

Isso prova a proposição, pois $p = \frac{1}{k^3}$ e então $p \leq \frac{8}{81k\Delta^2}$ se, e somente se, $k \geq \frac{9\Delta}{\sqrt{8}} \cong 3,18\Delta$. $\square$

Em 1991, Filip Guldan [41] havia obtido o mesmo resultado usando o lema de Lovász usual. A condição exigida por Guldan foi $k \geq \frac{7\Delta}{2}$. De fato, Guldan comete um pequeno erro quando estima o grau do grafo de dependência, no entanto, seu objetivo é melhorar as cotas no problema da *Arvoricidade Linear* [1, 2, 5, 77].

O problema da Arvoricidade Linear é resolvido usando técnicas específicas da Teoria dos Grafos quando o grau é pequeno e, quando a cintura do grafo é suficientemente grande, a prova se baseia na Proposição 4.3. Portanto, este também é apenas um exemplo para fazer um comparativo entre as diferentes versões do Lema de Lovász.

O próximo exemplo traz uma nova cota que até então não era possível de ser obtida sem o uso do Método Probabilístico e da nova versão apresentada aqui do Lema de Lovász. E também serve para mostrar a necessidade do grafo de dependência assimétrico para determinados problemas.

Latin Transversal

Definição 4.7. *Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas a_{ij}. Suponha que a_{ij} são inteiros para todo $ij = 1, \ldots, n$. Uma permutação $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} : i \mapsto \sigma(i)$ é chamada Latin transversal de A se as entradas $a_{i\sigma(i)}$ com $i = 1 \ldots, n$ são todas distintas.*

Proposição 4.5. *Seja A uma matriz $n \times n$ e $k \leq (n-1)/(256/27)$. Suponha que nenhum inteiro aparece em mais do que k entradas de A. Então A tem um Latin transversal.*

Prova: Seja σ uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$ escolhida aleatoriamente de acordo com distribuição uniforme. Denote por T o conjunto de todas as quatro-uplas ordenadas (i, j, i', j') tais que $i < i'$, $j \neq j'$ e $a_{ij} = a_{i'j'}$. Para cada $(i, j, i', j') \in T$, seja $A_{iji'j'}$ o evento que $\sigma(i) = j$ e $\sigma(i') = j'$.

Claramente, $A_{iji'j'}$ tem probabilidade $\frac{1}{n(n-1)}$ de ocorrer e qualquer permutação σ tal que $A_{iji'j'}$ ocorre não é Latin transversal. Por isso, um Latin transversal de A existe quando uma probabilidade não-nula de nenhum do eventos $A_{iji'j'}$ ocorrerem existe. Definimos, então, um grafo G cujo conjunto de vértices é T, onde dois vértices (i, j, i', j') e (p, q, p', q') são adjacentes se, e somente se, $\{i, i'\} \cap \{p, p'\} \neq \emptyset$ ou $\{j, j'\} \cap \{q, q'\} \neq \emptyset$.

Esse grafo tem grau máximo menor do que $4nk$. De fato, para (i, j, i', j') fixos, podemos escolher (s, t) de $4n$ maneiras diferentes com $s \in \{i, i'\}$ ou $t \in \{j, j'\}$ para (i, j, i', j') dados, e então, uma vez (s, t) é escolhido, temos menos do que k escolhas para (s', t') diferente de (s, t), tal que $a_{st} = a_{s't'}$, uma vez que, por hipótese, existem no máximo k entradas de A com o mesmo valor.

Assim, temos menos do que $4nk$ quatro-uplas (s, t, s', t') tais que $s = i$ ou $s = i'$ ou $t = j$ ou $t = j'$, com $a_{st} = a_{s't'}$. Agora, para cada uma das quatro-uplas (s, t, s', t'), podemos associar as quatro-uplas $(p, q, p', q') = (s, t, s', t')$ se $s < s'$ ou as quatro-uplas $(p, q, p', q') = (s', t', s, t)$ se $s' < s$.

Não é difícil ver que G é um grafo de dependência assimétrico para a família de eventos $A_{iji'j'}$, ou seja

$$\mathbb{P}(A_{iji'j'} | \bigcap_{(p,q,p',q') \in Y} \overline{A}_{pqp'q'}) \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

para quaisquer $(i, j, i', j') \in T$ e qualquer conjunto Y dos membros de T que não são adjacentes em G para (i, j, i', j'). Portanto, podemos aplicar Teorema 4.3 para o grafo lopsidependency G com o conjunto de vértices T descritos acima. Tome $\mu_x = \mu > 0$, para todo $x \in T$, e observe que o conjunto de vértices em $\Gamma^*_G((i,j,i',j'))$ é, pela construção anterior, a união de 4 subconjuntos, cada um com cardinalidade máxima nk tais que todos os vértices em cada um desses quatro subconjuntos são adjacentes. Logo, para tal grafo G,

$$\varphi^*_{(i,j,i',j')}(\mu) \leq (1+nk\mu)^4$$

e

$$\frac{\mu}{\varphi^*_{(i,j,i',j')}(\mu)} \geq \frac{\mu}{(1+nk\mu)^4} \equiv f(\mu).$$

Como o lado direito assume seu valor máximo em $\mu_0 = \frac{1}{3nk}$, podemos usar o Teorema 4.3 na região $p = \frac{1}{n(n-1)} \leq 27/256nk = f(\mu_0)$, o que é equivalente a dizer que $k \leq (n-1)/(256/27)$. $\square$

A mesma proposição com $4e$ em vez de $256/27$ é provada em [3] pág. 73, usando a versão do Lema Local de Lovász usual.

Trabalhos Futuros

Como vimos, no importante modelo do gás de subconjuntos finitos, o Critério de Gruber-Kunz-Fernández-Procacci possui demonstrações utilizando as três técnicas:

- usando as equações de Kirkwood-Salzburg, primeiramente feita por Gruber e Kunz [43] e, de maneira bem mais simples nesta tese;
- cotando diretamente os coeficientes de Ursell, feita por Fernández e Procacci em [32];
- por indução, prova também apresentada aqui.

No entanto, no caso do gás de polímeros abstratos, ainda é um problema em aberto provar o Critério de Fernández-Procacci através de um outro método que não seja usando combinatória e identidades grafo-árvore.

Sobre a parte do Lema de Lovász e o teorema obtido aqui, são centenas de artigos que utilizam o Lema Local de Lovász, fizemos apenas alguns exemplos.

Outra direção é investigar se existe um teorema dentro de Mecânica Estatística que seja o representante do Lema de Lovász para grafos orientados, veja Capítulo 4 de [3] para o teorema e exemplos.

Esta útima questão foi levantada por Scott e Sokal e o problema continua sem resposta.

Scott e Sokal ainda chamaram a atenção para o fato de que o lema no caso de grafos orientados precisa de outro objeto matemático, diferente da função partição, para ser formulado em Mecânica Estatística. Isso se deve ao fato da interação $W(x, y)$ ser simétrica e, portanto, não detecta a orientação dos elos.

Apêndice A

Princípio de Inclusão-Exclusão

Notação A.1. *Dados dois conjuntos T e Z. O símbolo $\delta_{T,Z}$ assume o valor 1 quando $T = Z$ e zero caso contrário.*

Lema A.1. (Princípio de Inclusão-Exclusão)

Seja X um conjunto finito. Considere o seguinte espaço vetorial real de funções $V = \{f : 2^X \to \mathbb{R}\}$ e a seguinte aplicação linear $\phi : V \to V$ definida por

$$\phi f(T) = \sum_{Y:Y \supseteq T} f(Y). \tag{A.1}$$

Então ϕ é inversível e

$$\phi^{-1} f(T) = \sum_{Y:Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} f(Y). \tag{A.2}$$

Prova: Seja $\psi : V \to V$ definida por

$$\psi f(T) = \sum_{Y:Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} f(Y). \tag{A.3}$$

Então segue que

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \phi) f(T) &= \psi(\phi f(T)) = \sum_{Y:Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} \phi f(Y) && \text{(A.4)}\\
&= \sum_{Y:Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} \sum_{Z:Z \supseteq Y} f(Z) && \text{(A.5)}\\
&= \sum_{Z:Z \supseteq T} \sum_{\substack{Y:\\ T \subseteq Y \subseteq Z}} (-1)^{|Y-T|} f(Z) && \text{(A.6)}\\
&= \sum_{Z:Z \supseteq T} \delta_{T,Z} f(Z) = f(T). && \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

$\square$

Apêndice B

Reticulados e Pontos Fixos

Seja S um conjunto.

Notação: Escreveremos $a \leq b$ para indicar que $(a, b) \in R$, onde R é uma relação $R \subseteq S \times S$.

Definição B.1. *Uma relação $R \subseteq S \times S$ é dita uma* **ordem parcial** *em S quando satisfaz as seguintes condições:*

(i) $x \leq x$, $\forall\ x \in S$. *(reflexividade)*

(ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$. *(anti-simetria)*

(iii)Se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$. *(transitividade)*

Definição B.2. *Um conjunto S munido de uma ordem parcial $\leq$ é dito* **parcialmente ordenado**.

Notação: $(S, \leq)$.

Definição B.3. *Seja $X \subseteq S$, onde $(S, \leq)$ é parcialmente ordenado. Dizemos que $a \in S$ é um* **limite superior (inferior)** *de X quando $x \leq a$ ($a \leq x$), $\forall\ x \in X$.*

Definição B.4. *Seja $X \subseteq S$, onde S é parcialmente ordenado. Dizemos que $a \in S$ é o* **supremo (ínfimo)** *de X quando a é o menor (maior) dos limites superiores (inferiores) de X. Ou seja, $a \leq a'$ ($a' \leq a$) para todo a' limite superior (inferior) de X.*

A unicidade tanto do ínfimo quanto do supremo (quando estes existem) de qualquer subconjunto de S segue da anti-simetria.

Definição B.5. *Um conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ é chamado de* **reticulado** *quando todos os subconjuntos com exatamente dois elementos de L tiverem supremo e ínfimo.*

Notação: Seja $(L, \leq)$ um reticulado. O supremo de um subconjunto de dois elementos $\{a, b\} \subseteq L$ será denotado por $a \vee b$ e o ínfimo por $a \wedge b$.

Exemplo B.1. *Considere* $([0, +\infty], \leq)$ *munido da ordem* $\leq$ *usual da reta estendida, neste caso um ordem total. Este é um exemplo onde o supremo dos conjuntos de dois elementos é um dos dos elementos do conjunto, ou seja,* $a \vee b = \max\{a, b\}$*. Analogamente,* $a \wedge b = \min\{a, b\}$

Definição B.6. *Seja* $(L, \leq)$ *um reticulado. Se todo subconjunto* $X \subseteq L$ *possui supremo e ínfimo então chamaremos* L *de* **reticulado completo***. Estes serão denotados por* $\sup X$ *e* $\inf X$*, respectivamente.*

Observação B.1. *Note que no caso de* $X = \emptyset$ *temos que* $\sup X = \inf L$ *e* $\inf X = \sup L$*.*

Exemplo B.2. *Seja* $\mathcal{P}$ *um conjunto enumerável e considere* L *o seguinte conjunto de funções* $L = \{f : 2^{\mathcal{P}} \to [0, +\infty]\}$*. Tome* $(L, \leq)$ *onde* $\leq$ *é a ordem parcial pontual, ou seja,* $f \leq g$ *quando* $f(X) \leq g(X)$ *para qualquer subconjunto de* $\mathcal{P}$*. Agora é fácil de ver que* $(L, \leq)$ *é um reticulado completo.*

Note ainda neste exemplo que se $\{f, g\} \subseteq L$, então $(f \vee g)(X) = \max\{f(X), g(X)\}$ e $(f \wedge g)(X) = \min\{f(X), g(X)\}$. O reticulado $(L, \leq)$ é completo devido ao fato de L conter as funções constantes $f \equiv 0$ e $g \equiv +\infty$.

Exemplo B.3. $L = [0, +\infty]^{\mathcal{P}}$ *novamente com a ordem parcial pontual é um reticulado completo.*

Definição B.7. *Seja* $(L, \leq)$ *um conjunto parcialmente ordenado. Diremos que* $\phi : L \to L$ *é* crescente *se* $\phi(x) \leq \phi(y)$ *quando* $x \leq y$*.*

Teorema B.1. (Teorema do Ponto Fixo de Knaster-Tarski) *Seja* $(L, \leq)$ *um reticulado completo e* $\phi : L \to L$ *crescente. Então o conjunto* P *dos pontos fixos de* ϕ *(*$\phi(x) = x$*) é não-vazio e* $(P, \leq)$ *é um reticulado completo.*

Antes da prova observe que o teorema acima garante a existência de um **ponto fixo máximo**, ou seja, um elemento $M \in L$ tal que $\phi(M) = M$ e $x \leq M$ para todo $x \in P$. E ainda, um **ponto fixo mínimo** m que satisfaz $m \leq x$ para todo $x \in P$, podendo inclusive ocorrer de ambos serem iguais. Isso ocorre porque apesar de P ser um subconjunto de um reticulado completo, o supremo ou ínfimo de P poderiam não pertencer ao conjunto, o que não ocorre pois $(P, \leq)$ é um reticulado completo.

Prova: Tome $A = \{x \in L : \phi(x) \leq x\}$. Como L é completo existe $\inf A = z \in L$ tal que $z \leq x$ para todo elemento $x \in A$ e, sendo ϕ crescente, temos que $\phi(z) \leq \phi(x) \leq x$. Ou seja, $\phi(z)$ é limite inferior para A e, pela definição de ínfimo, segue que $\phi(z) \leq z$.

Do fato de ϕ ser crescente obtemos $\phi(\phi(z)) \leq \phi(z)$, e isso implica que $\phi(z) \in A$. Assim, como z é o ínfimo de A, temos que $z \leq \phi(z)$, donde $\phi(z) = z$.

Agora que já sabemos que P é não-vazio, ainda vale a pena observar que $\inf P = \inf A = z$. De fato, como $P \subseteq A$ temos $z \leq \inf P$. Por outro lado, já provamos que z é ponto fixo, donde segue que $z \geq \inf P$, ou seja, $z = \inf P = m$.

Analogamente, $\sup P = \sup\{x \in L : x \leq \phi(x)\} = M \in P$.

Resta provar que $(P, \leq)$ é um reticulado completo. Para isso primeiramente observe que os intervalos fechados $[a, b]$ em L são reticulados completos, onde $[a, b] = \{x \in L : a \leq x \leq b\}$.

Seja $Y \subseteq P$. Se provarmos que $\phi(B) \subseteq B$ onde $B = [\sup Y, \sup P]$, podemos restringir ϕ ao reticulado completo $(B, \leq)$ e então, pelo que já provamos, sabemos que os pontos fixos da restrição é um conjunto que contém seu supremo e ínfimo. Ou seja, existe um m_B que é o ponto fixo mínimo desta restrição, donde seque que m_B é o menor dos limites superiores de Y em P, ou seja, $\sup Y = m_B$. Assim, $\phi(\sup Y) = \sup Y \in P$.

Agora, se $y \leq \sup Y \leq z$ então $y = \phi(y) \leq \phi(\sup Y) \leq \phi(z)$, para qualquer $y \in Y$ e $z \in B$.

Assim, $\sup Y \leq \phi(\sup Y) \leq \phi(z)$, para qualquer $z \in B$ e portanto, $\phi(B) \subseteq B$.

Para o ínfimo de Y a prova é análoga. E assim provamos que todo subconjunto de $Y \subseteq P$ possui um supremo e ínfimo em P, ou seja, $(P, \leq)$ é um reticulado completo. $\square$

Este resultado foi provado por Tarski em 1955 e muitas vezes é enunciado como *Teorema do ponto fixo de Tarski.* O motivo do nome de Bronislaw Knaster aparecer no resultado é que em 1928 o mesmo teorema havia sido provado por ele no caso particular do reticulado de subconjuntos de um conjunto, onde a ordem parcial era a da inclusão.

Definição B.8. *Seja $(L, \leq)$ um reticulado. Dizemos que uma função $\phi : L \to L$ é* **contínua** *se para toda seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente $(x_n \leq x_{n+1})$ em L tivermos $\sup\limits_n \phi(x_n) = \phi(\sup\limits_n x_n)$.*

Observação B.2. *Toda função contínua é crescente. De fato, seja ϕ contínua, se $x \leq y$ então por continuidade segue que $\phi(y) = \sup\{\phi(x), \phi(y)\}$ donde $\phi(x) \leq \phi(y)$.*

É possível obter de uma maneira construtiva o ponto fixo minimal de uma função crescente quando esta for contínua:

Teorema B.2. (Teorema do Ponto Fixo de Tarski-Kantorovitch) *Se $(L, \leq)$ é um reticulado completo e $\phi : L \to L$ é contínua então ϕ tem um ponto fixo e o ponto fixo mínimo é igual a $\sup\limits_n \phi^n(\inf L)$.*

Prova: Seja $x_0 = \inf L$. Como ϕ é contínua e então crescente, a seqüência $x_0 \leq \phi(x_0) \leq \phi^2(x_0) \leq ...$ é crescente. É fácil ver que para qualquer n temos $\phi^n(x_0) \leq m$ onde m é o ponto fixo mínimo de ϕ. Assim, $\sup_n \phi^n(x_0) \leq m$ e ainda, como a seqüência $\phi^n(x_0)$ é crescente e ϕ é contínua temos que $\sup_n \phi^n(x_0) = \sup_n \phi^{n+1}(x_0) = \phi(\sup_n \phi^n(x_0))$, ou seja, $\sup_n \phi^n(x_0)$ é um ponto fixo de ϕ.

Sendo m é o menor ponto fixo para ϕ, segue que $m \leq \sup_n \phi^n(x_0)$ e como já sabíamos que $\sup_n \phi^n(x_0) \leq m$, concluímos que $m = \sup_n \phi^n(x_0)$. $\square$

O teorema pode ser enunciado de maneira mais geral, ver [23] pág. 26.

Bibliografia

[1] Akiyama, J., Exoo, G. and Harary, F.: *Covering and paking in graphs III, cyclic and acyclic invariants.* Math. Slovaca **30**, 405-417 (1980).

[2] Akiyama, J., Exoo, G. and Harary, F.: *Covering and paking in graphs IV. Linear arboricity* Networks **11**, 69-72 (1981).

[3] Alon, N. and Spencer, J.: The Probabilistic Method. Second Edition. Wiley-Interscience. New York (2000).

[4] Alon, N.: *The maximum number of Hamiltonian paths in tournaments.* Combinatorica **10**, 319-324 (1990).

[5] Alon, N.: *The Linear Arboricity of Graphs.* Israel Jour. Math. **62**, n°3. (1988).

[6] Bartle, G. Robert.: *The Elements of Integration*(1966).

[7] Brydges, D. and Federbush, P.: *A new form of Mayer expansion in classical statistical mechanics.* Jour. Math. Phys. **19** (1978).

[8] Bonetto,F.; Falco,P. and A. Giuliani.: *Analyticity of the SRB measure of a lattice of coupled Anosov diffeomorphisms of the torus.* J. Math. Phys. **45**, 3282 (2004).

[9] Bissacot, R., Fernández, R., Procacci, A. and Scoppola, B.: *An Improvement of the Lovász Local Lemma via Cluster Expansion.*(Pré-publicação) disponível em http://arxiv.org/abs/0910.1824

[10] Bissacot, R. ; Fernández, R. and Procacci, A.: *On the Convergence of Cluster Expansions for Polymer Gases.* J. Stat. Phys. **139**, 598-617 (2010).

[11] Borgs, C.: *Absence of Zeros for the Chromatic Polynomial on Bounded Degree Graphs.* Combinatorics, Probability and Computing **15**, 63-74 (2006).

[12] Bollobás, B.: Modern Graph Theory. Springer-Verlag.(1998).

[13] Bollobás, B.: Random graphs. Vol. 73 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. (2001).

[14] Bovier, A. and Zahradník, M.: *A Simple Inductive Approach to the Problem of Convergence of Cluster Expansions of Polymer Models.* J. Stat. Phys. **100**, 765-778 (2000).

[15] Brydges, D.: A short course on cluster expansion. Les Houches 1984, K. Osterwalder, R. Stora eds., North Holland Press. (1986).

[16] Babai, L. and Spencer, J.: *Paul Erdös (1913-1996).* Notices of AMS (1998).

[17] Cammarota, C.: *Decay of Correlations for infinite range Interactions in unbounded Spin Systems.* Comm. Math. Phys. **85**, 517-528 (1982).

[18] Chudnovsky, M. and Seymour, P.: *The roots of the independence polynomial of a clawfree graph Source.* Journal of Combinatorial Theory Series B. **97**, Issue 3 , 50-357,(2007).

[19] Davidoff, G.; Sarnak, P. and Valette, A.: *Elementary Number Theory, Group Theory and Ramanujan Graphs.* Cambridge University Press, (2003).

[20] Diestel, R.: Graph Theory. Springer Verlag. New York. (1980).

[21] Dobrushin , R. L.: *Perturbation methods of the theory of Gibbsian fields.* in P. Bernard(editor). Lectures on Probability Theory and Statistics, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXIV - 1994. Lectures notes in Mathematics 1648, 1-66. Springer-Verlag, Berlin, (1996).

[22] Dobrushin, R. L.: *Estimates of semi-invariants for the Ising model at low temperatures.* In Topics in Statistical and Theoretical Physics, Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, 177 (1996) 59-81.

[23] Dugundji, J. and Andrzej, G.: Fixed point theory. Springer Monographs in Mathematics (2003).

[24] Enemoto, H. and Péroche, B.: *The linear arboricity of some regular graphs.* J. Graph Theory **8** 309-324(1984).

[25] Erdös, P.: *Some remarks on the theory of graphs.* Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 292-294, (1947).

[26] Erdös, P.: *On Problem in Graph Theory.* Math. Gazette. **47**, 220-223,(1963).

[27] Erdös, P. and Lovász, L.: *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions, in Infinite and finite sets.* Vol. II, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Vol. 10. (North-Holland, Amsterdam), (1975).

[28] Erdös, P. and Spencer, J.: *Lopsided Lov´asz local lemma and latin transversal*, Discrete Apl. Math. **30**, 151-154, (1991).

[29] Faris, W.: *Probabilistic combinatorics and lattice gas estimates.* preprint (2005).

[30] Faris, W.: *A connected graph identity and convergence of cluster expansions.* J. Math. Phys. **49**.

[31] Faris, W.: *A Gentle Introduction to Cluster Expansions.* in Probability and partial differential equations in modern applied mathematics. Editors Edward C. Waymire, Jinqiao Duan. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications. (2005).

[32] Fernandez, R. and Procacci A.: *Cluster expansion for abstract polymer models.New bounds from an old approach.* Comm. Math. Phys. **274**, n.1, 123-140 (2007).

[33] Fernandez, R.; Procacci A.: *The Analyticity Region of the Hard Sphere Gas. Improved Bounds.* J. Stat. Phys. **128**, 1139-1143, (2007).

[34] Gallavotti, G.: Statistical mechanics. A short treatise. Springer Verglag. (1999).

[35] Gallavotti, G. and Miracle-Sole: *Statistical Mechanics of Lattice Systems.* Comm. Math. Phys. **5**, 317-323 (1967).

[36] Gallavotti, G. and Miracle-Solé: *Correlation Functions of a Lattice System. Comm. Math. Phys.* **7**, 274-288 (1968).

[37] Gessel, I. and Sagan, B.: *The Tutte polynomial of a graph, depth-first search, and simplicial complex partitions.* E. J. Combinatorics **3**. n° 2 (1996).

[38] Glimm, J. and Jaffe, A.: Quantum physics: A functional integral point of view. Springer-Verlag.(1981).

[39] Gould, Ronald: Graph Theory. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. (1988).

[40] Groeneveld, J.: *Two theorems on classical many-particle systems.* Physics Letters. Volume 3, Issue 1, 50-51(1962).

[41] Guldan, F.: *Note on linear arboricity of graphs with large girth.* Czechoslovak Mathematical Journal **41**, no. 3, pages 467-470 (1991).

[42] Guldan, F.: *The linear arboricity of 10-regular graphs.* Math. Slovaca **36**,225-228,(1986).

[43] Gruber, C. and Kunz, H.: *General properties of polymer systems.* Comm. Math. Phys **22**, 133–61(1971).

[44] Haxell, P.E.: *A Note on Vertex List Colouring.* Combin Probab.Comput. Vol.**10**, 345-347(2001).

[45] Hoppen, C.: *Properties of graphs with large girth;.* Phd Thesis. University of Waterloo.(2008).

[46] Israel,R.B.: *High-Temperature Analyticity in Classical Lattice Systems.* Comm. Math. Phys **50**, 245–257(1976).

[47] Kirkwood,J.G. and Salsburg,W.: *The Statistical mechanics theory of molecular distribution functions in liquids.* Discussions Faraday Soc. **15** 28-34 (1953).

[48] Kotecký, R. and Preiss, D.: *Cluster expansion for abstract Polymer models.* Comm. Math. Phys. **103**, 491-498 (1986).

[49] Malyshev, V.A.: *Uniform cluster estimatives for lattice models.* Comm. Math. Phys. **64**, 131-157 (1979).

[50] Mayer, J. and Montroll, E.: *Molecular Distribution* J. Chem. Phys. Vol. **9**, Issue 2 (1941).

[51] Mayer, J.: *Integral Equations between Distributions of Molecules.* J. Chem. Phys. Vol. **15**, n° 4 (1947).

[52] Miracle-Solé, S.: *On the convergence of cluster expansions.* Physica A. **279**, 244-249. (2000).

[53] McDiarmid, C. and Reed, B.: *Linear Arboricity of Random Graphs.* Random Structures and Algorithms, Vol. 1. No. **4**, (1990).

[54] Mujica, J.: *Complex Analysis in Banach Spaces-Holomorphic functions and Domains of Holomorphy in Finite and Infinite Dimensions.* North-Holland mathematics studies 120. Notas de Matemática (107).

[55] Nardi, F. R., Olivieri, E. and Zahradnik, M.: *On the Ising Model with Strongly Anisotropic External Field.* J. Stat. Phys. **97**, 87-144 (1999).

[56] Bollobas, B.: *Paul Erdos, 1913-1996.* Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician),**48**, No. 2 (1999), 271-273.

[57] Petersen, J.: *Die Theorie der regulären graphs.* Acta Mathematica **15** 193-220, (1891).

[58] Penrose, O.: *Convergence of fugacity for classical systems.* In Statistical mechanics: foundations and applications, A. Bak (ed.) Benjamin, New York. 101-109 (1967).

[59] Procacci, A.: Cluster expansion methods in rigorous statistical mechanics. www.mat.ufmg.br/ aldo/papers/book.pdf.

[60] Procacci A.: *Abstract polymer models with general pair interactions.* Journal of Statistical Physics **129**, n.1, 171-188 (2007).

[61] Fernandez, R., Procacci A. and Scoppola, B.: *The analyticity region of the hard sphere gas. Improved bounds.* Journal of Statistical Physics, **128**, n.5, 1139-1143 (2007).

[62] Procacci, A., Scoppola, B. and Gerasimov, V.: *Potts model on infinite graphs and the limit of chromatic polynomials. Comm. Math. Phys.* **235**, 215–31 (2003).

[63] Procacci, A. and Scoppola, B.: *Polymer gas approach to N body lattice systems.* J. Stat. Phys. **96**, 49-68(1999).

[64] Plummer, M.: *Graph factors and factorization: 1985-2003: A survey.* Discrete Math. **307**, 791-821, (2007).

[65] Ruelle, D.: Statistical Mechanics - Rigorous Results. Second Edition. Imperial College Press and World Scientific Publishing (1999).

[66] Ruelle, D.: *Correlation Funtionals* J. Math. Phys. Vol.**6** N° 2. 201–220(1965).

[67] Scott, A. and Sokal, A.: *The repulsive lattice gas, the independent-set polynomial, and the Lovász local lemma.* J. Stat. Phys. **118**, no. 5-6, 1151–1261(2005).

[68] Seiler, E.: *Gauge Theories as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics.* Lectures Notes in Physics. Vol. 159. New York (1982).

[69] Shearer, J. B.: *On a problem of Spencer.* Combinatorica **5**, 241-245, (1985).

[70] Simon, B.: The Statistical Mechanics of Lattice Gases. Princeton University Press(1993).

[71] Spencer, J.: *Asymptotic Lower Bounds for Ramsey Functions.* Discrete Mathematics **20**, 69-76, (1977).

[72] Szele, T.: *Kombinatorikai vizsgalatok az iranyitott teljes graffal kapcsolatban.* Mat. Fiz. Lapok **50** pp. 223–256,(1943). For a German translation see: T. Szele, Publ. Math. Debrecen, **13** pp. 145-168, (1966).

[73] Stanley, R.P.: Enumerative combinatorics. Vol. 1, Vol. 49 da coleção Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press. (1997).

[74] Stanley, R.P.: Enumerative combinatorics. Vol. 2, Vol. 62 da coleção Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press. (1997).

[75] Morais T.; Procacci A.: *Absence of phase transitions in a class of integer spin systems.* Journal of Statistical Physics (2009).

[76] Tarski, A. *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*. Pacific J. Math. **5**, n° 2 (1955), 285-309.

[77] Tomasta, P.: *Note on linear arboricity*. Math. Slovaca **32** 239-242 (1982).